

# РОЗДІЛ I. МЕХАНІКА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.376

DOI: 10.25140/2411-5363-2018-2(12)-9-24

Олександр Гуляр, Сергій Пискунов, Юрій Максим'юк

## ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДЕНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

**Актуальність теми дослідження.** З огляду на літературні джерела, можна стверджувати, що нині проблема дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини висвітлено недостатньо повно. Розрахунок оболонок як систем з ускладненою структурою спричиняють не тільки обчислювальні, але й принципові методичні труднощі. Їхнє вирішення приводить до необхідності створення нових універсальних розрахункових моделей. Найуспішніше ця проблема може бути вирішена методом скінчених елементів (МСЕ) на основі реалізації методики моментної схеми скінчених елементів (МССЕ).

**Постановка проблеми.** Сучасний розвиток обчислювальної техніки стимулює розробку нових уточнених методів дослідження оболонок, які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Важливе значення набуває розробка автоматизованих програмних комплексів, які є необхідним інструментом для практичного вирішення розглянутої проблеми через проведення чисельних досліджень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Були розглянуті як класичні роботи, так і сучасні публікації у вітчизняних та закордонних джерелах, що відповідають цій проблемі.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Реалізація методик дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини.

**Постановка завдання.** На основі МССЕ реалізується методика розв'язання задачі про напружено-деформований стан виділеного класу оболонок обертання з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності.

**Виклад основного матеріалу.** На основі вихідних співвідношень просторової задачі теорії пружності й методика МССЕ наведено ефективний підхід до визначення напружено-деформованого стану складених оболонок обертання середньої товщини за наявності великих переміщень і деформацій пластичності. Шляхом порівняння з розв'язками, отриманими в просторовій постановці, показано, що розроблена методика дозволяє отримувати достовірні результати, забезпечуючи суттєве зменшення обчислювальних витрат.

**Висновки відповідно до статті.** Аналіз результатів розв'язання контрольних прикладів показав достовірність, універсальність і ефективність використання методика й розробленого комплексу до моделювання процесів деформування тонкостінних об'єктів, що супроводжуються істотним формозміненням за рахунок деформацій пластичності.

**Ключові слова:** метод скінчених елементів; моментна схема скінчених елементів; пластичність; складені оболонки обертання середньої товщини; геометрична нелінійність; занурюванні апарати; витяжка циліндричного стакану.

Рис.: 12. Табл.: 3. Бібл.: 12.

**Актуальність теми дослідження.** Серед об'єктів сучасної техніки широкий клас складають відносно тонкостінні тіла обертання, створення яких вимагає підвищеної уваги до розрахункового визначення їх напружено деформованого стану як під час експлуатації, так і в процесі виготовлення.

**Постановка проблеми.** Сучасний розвиток обчислювальної техніки стимулює розробку нових уточнених методів дослідження оболонок, які мають ширше коло використання, ніж традиційні методи розрахунку окремих класів оболонок. Важливе значення набуває розробка автоматизованих програмних комплексів, які є необхідним інструментом для практичного вирішення розглянутої проблеми через проведення чисельних досліджень.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблемі розробки методів розв'язку вісесиметричних задач фізично і геометрично нелінійного деформування оболонок присвячена досить значна кількість публікацій. Їх огляд наведено в багатьох статтях та монографіях, зокрема в [1; 2]. Аналіз публікацій з цього питання свідчить, що значна кількість проблем, пов'язаних з необхідністю моделювання процесів розвитку великих деформацій пластичності та визначення на цій основі граничної несучої здатності відповідальних об'єктів сучасної техніки, які являють собою складені оболонки складної форми середньої товщини, потребує проведення додаткових досліджень.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Реалізація методик дослідження нелінійного деформування складених оболонок обертання середньої товщини.

**Постановка завдання.** Реалізується побудова розрахункових співвідношень, методів розробки ефективних підходів до розв’язання систем нелінійних рівнянь і визначення на цій основі параметрів напружено-деформованого стану відповідальних об’єктів сучасної техніки.

**Виклад основного матеріалу. Вихідні співвідношення.** Розглянемо в базисній круговій циліндричній системі координат  $Z^{\alpha'}$  ( $\alpha=1,2$ ) вісесиметричну оболонку, напружено-деформований стан якої описується в місцевій криволінійній системі координат  $x_{\alpha\beta}$  органічно пов’язаною з геометрією оболонки (рис. 1, а).

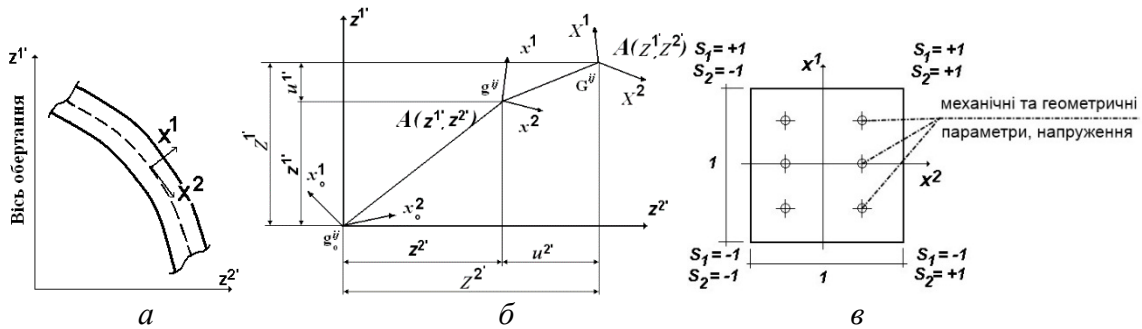


Рис. 1. Місцева криволінійна система координат (а), зміна розташування точки відповідно до введеної проміжної відрахункової конфігурації (б), розроблений СЕ (в)

Будемо вважати, що в кожній точці меридіонального перетину зв’язок між базисною і місцевою системою координат однозначно визначається тензором перетворень, де  $z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x_{\beta}}$ .

У ролі вихідних прийняті співвідношення просторової задачі нелінійної теорії пружності, наведені в роботі [3]. Зв’язок між напруженнями і деформаціями за межею текучості прийнято відповідно до основних положень теорії течії, наведені в [4].

При великих деформаціях можливі значні повороти частин конструкцій, які не повинні змінювати напружено-деформований стан тіла. У цьому випадку необхідно, щоб величини, які входять у визначальні співвідношення, задовольняли вимогам індивергентності. У зв’язку з цим у роботі використані тензор напружень Коші й міра деформацій Фінгера. Обидва тензори та їх інваріанти задовольняють властивості індивергентності [3].

Опис напружено-деформованого стану об’єктів у процесах, що супроводжуються великими подовженнями й поворотами, здебільшого, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій  $x_0^i$  і актуальній  $X^i$  (рис. 1, б).

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію  $x^i$  (рис. 1, б), компоненти метричного тензора якої позначимо через  $g^{ij}$ . Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора  $\Delta G^{ij}$  був малою величиною порівняно з компонентами метричного тензора в актуальній конфігурації  $G^{ij}$ .

Геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних компонент приросту деформації в актуальній конфігурації визначаються через переміщення відносно проміжної відрахункової конфігурації:

$$\Delta \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha} + u^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta}), \quad \Delta \epsilon_{33} = \frac{1}{2} (2z^{2'} u^{2'} + (u^{2'})^2). \quad (1)$$

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\Delta \epsilon^{\wedge}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (z^{\nu'}_{,\alpha} u^{\nu'}_{,\beta} + z^{\nu'}_{,\beta} u^{\nu'}_{,\alpha}), \quad \Delta \epsilon^{\wedge}_{33} = z^{2'} u^{2'}. \quad (2)$$

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в актуальній конфігурації (1) можна подати співвідношеннями, аналогічними формулі (2):

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{z}_{,\beta}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + \bar{z}_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}), \quad \Delta \varepsilon_{33} = \bar{z}^{\nu'} u^{\nu'}, \quad (3)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}^{\nu'} = z^{\nu'} + \frac{1}{2} u^{\nu'}, \quad \bar{z}_{,\beta}^{\nu'} = z_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'}. \quad (4)$$

Можна показати, що вираз (3) тотожно дорівнює (1):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} ((z_{,\alpha}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{\nu'}) u_{,\beta}^{\nu'} + (z_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'}) u_{,\alpha}^{\nu'}) = \\ &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + \frac{1}{2} u_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'}) = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}). \\ \Delta \varepsilon_{33} &= (z^{\nu'} + \frac{1}{2} u^{\nu'}) u^{\nu'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічно можна представити варіацію деформацій. Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (1):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + 2 \delta u_{,\alpha}^{\nu'} u_{,\beta}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z^{\nu'} \delta u^{\nu'} + u^{\nu'} \delta u^{\nu'}). \end{aligned} \quad (6)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (3):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (Z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + Z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= Z^{\nu'} \delta u^{\nu'}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де} \quad Z^{\nu'} = z^{\nu'} + u^{\nu'}, \quad Z_{,\beta}^{\nu'} = z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}, \quad (8)$$

При їх підстановці в (7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} ((z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) \delta u_{,\beta}^{\nu'} + (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) \delta u_{,\alpha}^{\nu'}) = \\ &= \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}) = \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + 2 u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z^{\nu'} + u^{\nu'}) \delta u^{\nu'} = (z^{\nu'} \delta u^{\nu'} + u^{\nu'} \delta u^{\nu'}). \end{aligned} \quad (9)$$

**Методика розв'язання задачі пружнопластичного деформування складених оболонок середньої товщини.** У цій роботі за основу побудови розв'язувальних нелінійних співвідношень вісесиметричних оболонок середньої товщини прийнята методика моментної схеми скінчених елементів (МССЕ), викладена в [5].

У роботі [6] отримані розв'язувальні співвідношення МССЕ для визначення напружено-деформованого стану оболонок обертання і проведена їх апробація на широкому колі контрольних прикладів, що охоплюють як тонкостінні об'єкти постійної і змінної товщини, так і оболонки середньої товщини. Крім того, розглянута складена оболонка являє собою поєднання елементів сфери тора і циліндра. Зіставлення з результатами відомих розв'язків показало, задовільний збіг усіх параметрів напружено-деформованого стану. Крім того, шляхом дослідження збіжності результатів показано, що розроблені скінчені елементи (СЕ) рис. 1, *в* не поступаються за ефективністю оболонковим СЕ.

У цій роботі використовується комбінований алгоритм, що поєднує інтегрування за параметром із методом Ньютона-Кантаровича на одному кроці *m* значення параметра спуску  $\lambda$  [2].

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K^*]_m^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (10)$$

де  $\{u\}_n^m$  – приращення переміщень на ітерації  $n$  кроку  $m$ ;  $[K^*]_m$  – лінеаризована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації  $x_m^\alpha$  з використанням тензора миттєвих жорсткостей пружно-пластичного матеріалу й координат вузлів дискретної моделі  $x_m^\alpha$ ;  $\{Q\}_n^m$ ,  $\{R\}_n^m$  – вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації  $X_m^\alpha$ . Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням як фізичної, так і геометричної нелінійності на основі повних напружень, що дозволяє уникнути вказаної вище проблеми накопичення похибки.

У загальному випадку формули для визначення коефіцієнтів матриці жорсткості та вузлових реакцій мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} [k] &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [B]^T [D] [B] \sqrt{g} H_i H_j \right] (x_i^1, x_j^2), \\ \{r_\sigma\} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[ [B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right] (x_i^1, x_j^2), \end{aligned} \quad (11)$$

де  $I$ ,  $J$  – кількість точок інтегрування по  $x^1$ ,  $x^2$  відповідно;  $H_i$ ,  $H_j$  – вагові функції;  $x_i^1$ ,  $x_j^2$  – координати точок інтегрування.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\|\{Q\}_n^m\| - \|\{R\}_n^m\| \leq \zeta \|\{Q\}_n^m\|, \quad (12)$$

де  $\zeta$  – параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь;  $\|\{Q\}_n^m\|$  – сума квадратів вузлових зусиль скінчено елементної моделі (СЕМ);  $\|\{R\}_n^m\|$  – сума квадратів реакцій скінченоелементної моделі (СЕМ).

Початкове значення вектора переміщень на першій ітерації кроку  $m$  екстраполюється за значенням вектора  $\{u_{m-1}\}$  і приращень параметра  $\Delta \lambda_{m-1}$  і  $\Delta \lambda_m$ :

$$\{u_m\} = \frac{\{u_{m-1}\} \Delta \lambda_m}{\Delta \lambda_{m-1}}. \quad (13)$$

Після цього розпочинається ітераційний процес розв'язання системи нелінійних рівнянь відповідно до (1).

За обчисленим у результаті розв'язку системи нелінійних рівнянь значенням приращення вектора  $\{u_m\}$  визначаються приращення фізичних напружень  $(\Delta \tilde{\sigma}^{ij})_m$ :

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{m-1} + (\Delta \tilde{\sigma}^{ij})_m, \quad (14)$$

та виконується перерахунок базисних координат всіх вузлів сіткової області за формулою:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + u_m^\alpha. \quad (15)$$

Здійснюється перевірка виконання умови (12). При її виконанні ітераційний процес закінчується. Якщо умова не виконана, то визначається нове приращення параметра і виконується наступний крок чисельного інтегрування.

Як параметр може застосовуватися як інтенсивність навантаження, так і величина переміщення деякого вузла сіткової області. Використання двох параметрів спуску дає змогу отримувати всю криву навантаження-прогин при неоднозначності функцій  $q(u)$  або  $u(q)$ .

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Для з'ясування можливості визначення розвитку зон пластичності в тонкостінних конструкціях, які апроксимуються по товщині одним скінченим елементом, виконано пружно-пластичний розрахунок шарнірно опертої балки, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 2) при наступних механічних характеристиках:  $E = 1,0$ ;  $\nu = 0,3$ . За товщиною скінченного елемента приймалося п'ять Гаусових точок інтегрування.

Аналітичний розв'язок задачі наведений у роботі [7], де зв'язок координат між зонами пластичності з інтенсивністю заданого розподіленого навантаження  $q$  представлений у вигляді:

$$z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right), \tag{16}$$

де  $h$  – половина висоти балки;  $a$  – половина довжини балки;  $q_0$  – величина розподіленого навантаження, за якої з'являються пластичні деформації;

$$q_0 = \frac{4 M}{3 a^2}, \tag{17}$$

де  $M$  – значення згинального моменту.

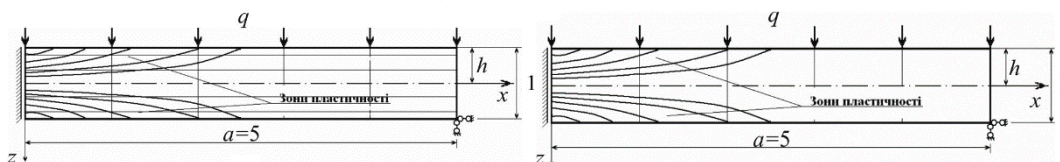


Рис. 2. Шарнірно оперта балка завантажена рівномірно розподіленим навантаженням

Для дослідження достовірності результатів розв'язку фізично й геометрично нелінійних задач, при використанні одного СЕ по товщині оболонки було проведено їх порівняння з розв'язком, отриманим у просторовій постановці.

Торосферичний посуд складається з елементів сфери, тора й циліндра під дією внутрішнього тиску (рис. 3, а). Товщина стінки посуду  $h = 1/4$  дюйма (0,00635 м), коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,31$ , інтенсивність внутрішнього тиску становить 100 фунтів на один квадратний дюйм (689,476 кН/м<sup>2</sup>). Відношення межі текучості  $\tau_s$  до модуля пружності  $E$  становить 1:750. Результати розрахунку, отримані МССЕ, порівнювалися з результатами, що отримані в роботі [8]. На рис. 3, б представлені криві, які показують зростання максимальної деформації на тороїдальній частині посуду залежно від величини інтенсивності внутрішнього тиску.

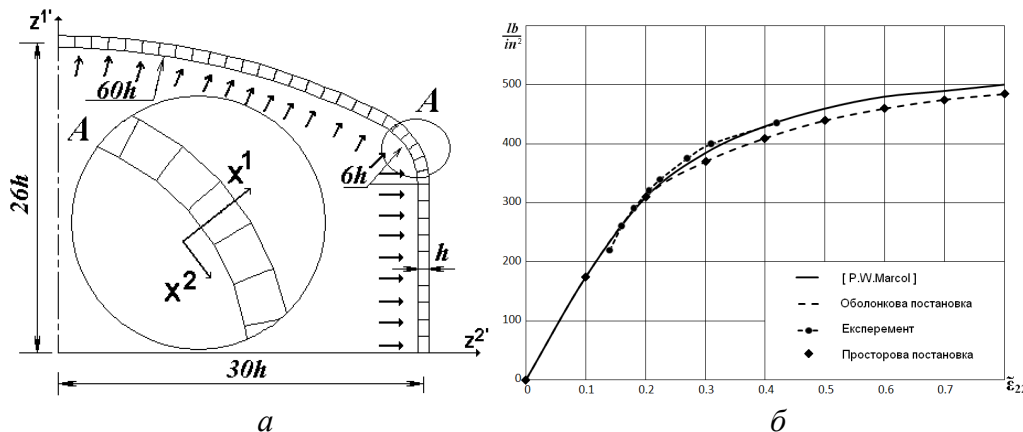


Рис. 3. Дискретна модель (а), зростання максимальної деформації на тороїдальній частині посуду залежно від величини інтенсивності внутрішнього тиску (б)

Суцільною лінією зображені результати роботи [8], пунктирною з кружечками – дані експерименту, пунктирною лінією – розв’язки, отримані на основі МССЕ. Спостерігається непогана для такої складної задачі збіжність результатів.

**Вплив урахування великих переміщень на напружено-деформований стан занурюваних оболонкових об’єктів.** Одному з основних параметрів, що визначають рівень експлуатаційних і екстремальних навантажень при проектуванні занурюваних апаратів, приймаються величини тисків, які відповідають виникненню деформацій пластичності і  $Q_p$  і втрати несучої здатності  $Q_k$ .

Як приклад застосування розробленої методики до визначення напружено-деформованого стану складених оболонок постійної товщини розглянемо два типи підводних апаратів, що відрізняються конструктивними особливостями й функціональним призначенням. Перший – це дозাপравочний балон, який являє собою торосферичний посуд, навантажений зовнішнім тиском інтенсивністю  $q$ . Розрахункова схема об’єкта і можливі варіанти скінчено елементної дискретизації оболонковою і просторовою апроксимацією представлені на рис. 4, а. Конструкція запроектована для занурення на великі глибини і являє собою циліндр, з’єднаний з двома днищами тороїдальними ділянками позитивної гаусової кривизни. Радіус серединної поверхні сферичних оболонок  $R_1 = 200$  см, радіус циліндра  $R_2 = 100$  см, радіус тороїдальних ділянок  $R_3 = 15$  см, загальна довжина об’єкта  $2Z_c = 400$  см. Товщина оболонки  $h$  змінюється в діапазоні від 2 до 4 см. Модуль пружності  $E = 205939,65$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , межа текучості при чистому зсуві  $\tau_s$  прийняті 3000, 6000 і 9000 кг/см<sup>2</sup>.

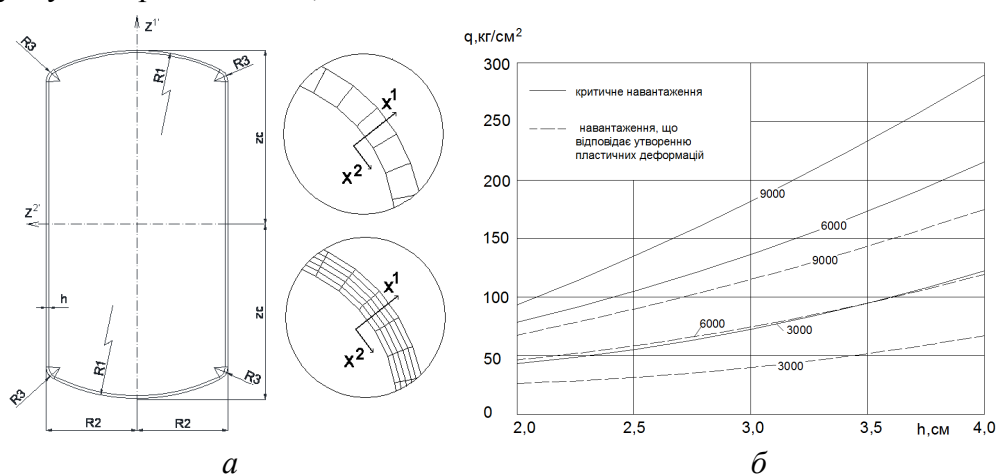


Рис. 4. Дозাপравочний балон (а), залежність величини критичного навантаження  $R_k$  від товщини оболонки при трьох значеннях межі текучості (б)

На основі дослідження [6] оболонка апроксимується 50 СЕ в меридіальному напрямку (20 – на сферичній, 10 – на тороїдальній і 20 – на циліндричній ділянці) і одним по товщині. Результат розрахунку представлений на рис. 4, б у вигляді кривих, що відображають залежність величини критичного навантаження  $R_k$  від товщини оболонки при трьох значеннях межі текучості. Навантаження, яке відповідає появі пластичних деформацій  $R_T$ , відмічені пунктирною лінією. Цифри на графіку відображають величину  $\tau_s$ . Визначення критичного навантаження і тиску, які характеризують появу пластичних деформацій, отримані при одночасному урахуванні фізичної та геометричної нелінійності.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити такі висновки. Товщина оболонки й межа пластичності матеріалу при чистому зсуві суттєво впливають на величину  $R_k$  і  $R_T$  у прийнятному діапазоні зміни параметрів. Залежність критичних навантажень і тисків, відповідних утворенню пластичних деформацій, від  $h$  близька до лінійної. Так, максимальна відмінність розрахункових величин  $R_k$  і  $R_T$  від значень, розрахованих за допомогою лі-

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

нійної інтерполяції на ділянці від  $h = 2$  до  $h = 4$  см, становить 5–6 %. Зі збільшенням товщини оболонки спостерігається тенденція до зростання відношення  $R_K/R_T$  при фіксованому значенні  $\tau_s$ . Водночас збільшення  $\tau_s$  призводить до зменшення цього відношення (табл. 1). Дані табл. 1 свідчать про те, що розглянута конструкція дозাপравочного балона після утворення пластичних деформацій здатна сприймати значні навантаження (які в 1,5–2,0 рази перевищують  $R_T$ ) до моменту втрати стійкості.

У табл. 1 наведені також відношення показників зміни  $R_K$  і  $R_T$ , що відповідають збільшенню границі текучості при чистому зсуві в 2 і 3 рази. Тут  $R_K(3000)$  і  $R_T(3000)$  позначають критичні навантаження і тиск, що характеризують момент утворення пластичних деформацій, при  $\tau_s = 3000$  кг/см<sup>2</sup>. Очевидно, що збільшення  $\tau_s$  не призводить до пропорційного зростання  $R_K$  і  $R_T$ . Характер зміни величин  $R_K$ ,  $R_T$  і  $R_K/R_T$  пояснюється впливом геометричної нелінійності, яке проявляється тим сильніше, чим тонша оболонка і вище межа текучості матеріалу. Про кількісний вплив великих переміщень на процес деформування цієї конструкції дозাপравочного балону можна судити на підставі результатів, наведених у табл. 1, де  $P_K^II$  і  $P_T^II$  – інтенсивність зовнішнього тиску, визначена без урахування геометричної нелінійності.

Таблиця 1

Інтенсивність зовнішнього тиску при різних товщина оболонки

$(\tau_s/E) \cdot 10^3$	$h = 2$ см			$h = 4$ см			$h = 2$ см		$h = 4$ см	
	$\frac{P_K}{P_{K(3000)}}$	$\frac{P_T}{P_{T(3000)}}$	$\frac{P_K}{P_T}$	$\frac{P_K}{P_{K(3000)}}$	$\frac{P_T}{P_{T(3000)}}$	$\frac{P_K}{P_T}$	$\frac{P_K}{P_K^II}$	$\frac{P_T}{P_T^II}$	$\frac{P_K}{P_K^II}$	$\frac{P_T}{P_T^II}$
1/7	1,00	1,00	1,80	1,00	1,00	1,95	0,79	0,96	0,83	0,97
2/7	1,70	1,96	1,57	1,77	1,97	1,75	0,67	0,9	0,74	0,95
3/7	2,17	2,74	1,46	2,38	2,86	1,63	0,59	0,88	0,67	0,93

Насамперед необхідно зазначити, що зміна першочергової форми конструкції під дією зовнішнього тиску негативно впливає як на величину  $R_K$ , так і на  $R_T$ . Отже, врахування геометричної нелінійності в цьому набуває принципового значення в порівнянні з об'єктами, що перебувають під дією внутрішнього тиску. Залежність  $R_T$  від формозмінення значно менше, ніж від критичних навантажень. Це цілком закономірно, оскільки момент виникнення пластичних деформацій відбувається при відносно невеликих переміщеннях оболонки.

На рис. 5, а і 5, б показані графіки, що відображають величину наведеного нормального переміщення  $w/h$  у центрі сферичної ділянки залежно від значення зовнішнього тиску для оболонок товщиною 2 і 4 см при значеннях  $\tau_s = 3000$  і  $9000$  кг/см<sup>2</sup>.

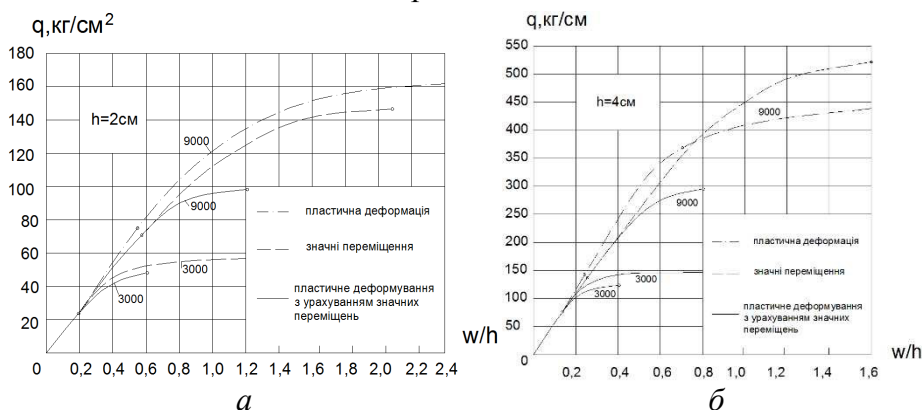


Рис. 5. Графіки залежності нормального переміщення від значення зовнішнього тиску

Суцільною лінією зображені криві, що відповідають розрахункам при сумісному впливі пластичного деформування і великих переміщень. Пунктирною лінією позначено вирішення геометрично нелінійної задачі, штрихпунктирною – фізично нелінійної. Точ-

ками на кривих відзначені навантаження, що відповідають початку розвитку пластичних деформацій, кружечками – критичні навантаження. Представлені результати свідчать про істотні залежності деформування конструкції від товщини оболонки і механічних характеристик матеріалу. При цьому слід зазначити, що пластичне деформування починається фактично при тих самих значеннях приведенного зміщення  $(w/h)T$  як у випадку врахування великих переміщень, так і в геометрично лінійній постановці. Тому збільшення  $\tau_s$  викликає пропорційну зміну  $(w/h)T$  не залежно від товщини оболонки.

Деяко інша справа з переміщеннями  $(w/h)K$ , що характеризують деформативність конструкції в момент втрати стійкості. У цьому випадку зростання  $\tau_s$  в 3 рази збільшує  $(w/h)K$  всього в 2 рази (у прийнятому діапазоні зміни  $h$ ).

Як і для навантажень, спостерігається зміна величини відношення  $(w/h)K / (w/h)T$  залежно від значення  $\tau_s$ . Так, у оболонок товщиною  $h = 2$  см  $(w/h)K / (w/h)T$  становить 3,16 і 2,11 при  $\tau_s = 3000$  і  $9000$  кг/см<sup>2</sup> відповідно. Відносно зменшення  $(w/h)K / (w/h)T$  зі збільшенням  $\tau_s$  притаманне і для оболонок товщиною  $h = 4$  см (3,82 і 2,41 при  $\tau_s = 3000$  і  $9000$  кг/см<sup>2</sup>). Однак абсолютне значення  $(w/h)K / (w/h)T$  зі зростанням товщини збільшується. Ці дані повністю узгоджуються з результатами, представленими в табл. 1.

Врахування обох видів нелінійності значно підвищує деформативність оболонки, особливо при тисках, що значно перевищують  $P_t$ . Зокрема,  $(w/h)K$  приблизно в 1,7-1,4 ( $\tau_s = 9000$  кг/см<sup>2</sup>) і в 2,0-1,7 ( $\tau_s = 3000$  кг/см<sup>2</sup>) рази більше значень наведених переміщень, обчислених з урахуванням тільки фізичної чи тільки геометричної нелінійності, при тих же самих навантаженнях, рівних  $P_k$ .

Відмінністю в постановці задачі обумовлено й розбіжність картини напруженого стану, одержуваної при тих самих навантаженнях. Як приклад розглянемо оболонку ( $h = 2$  см,  $\tau_s = 9000$  кг/см<sup>2</sup>) під дією зовнішнього тиску інтенсивністю  $97,26$  кг/см<sup>2</sup>, що відповідає  $P_k$ . Результати розрахунку у вигляді епюр меридіональних  $\tilde{\sigma}_{(e)}^{22}$  і  $\tilde{\sigma}_{(3)}^{22}$  і кільцевих  $\tilde{\sigma}_{(e)}^{23}$ ,  $\tilde{\sigma}_{(3)}^{23}$  напружень, що відображають напружений стан внутрішньої і зовнішньої поверхонь дозাপравочного балона, представлені на рис. 6 і 7. Умовні позначення прийнято згідно з рис. 5.

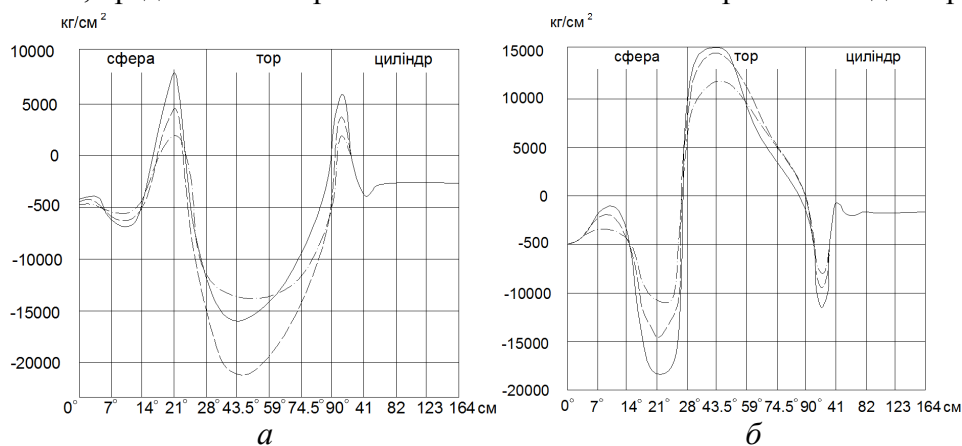


Рис. 6. Епюри меридіальних напружень дозাপравочного балона:  
а – внутрішня поверхня; б – зовнішня поверхня

З наведених графіків випливає, що вплив пластичного деформування призводить до зменшення меридіональних напружень  $\tilde{\sigma}_{(e)}^{22}$  на внутрішній поверхні тороїдальної ділянки (рис. 6, а). З іншого боку, врахування геометричної нелінійності збільшує  $\tilde{\sigma}_{(3)}^{22}$  (рис. 7, б), тобто обидва фактори призводять до протилежних результатів, але взаємно не компенсуються, оскільки проявляються в різних точках конструкції.

Розподіл кільцевих напружень на тороїдальній ділянці характеризується подобою епюр, побудованих на підставі відокремленого врахування геометричної та фізичної нелінійності. При сумісному впливі обох видів нелінійності відбувається значний пере-



TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

розподіл напружень, що супроводжується утворенням локальних екстремумів в областях, розташованих біля кордону тороїдальної оболонки.

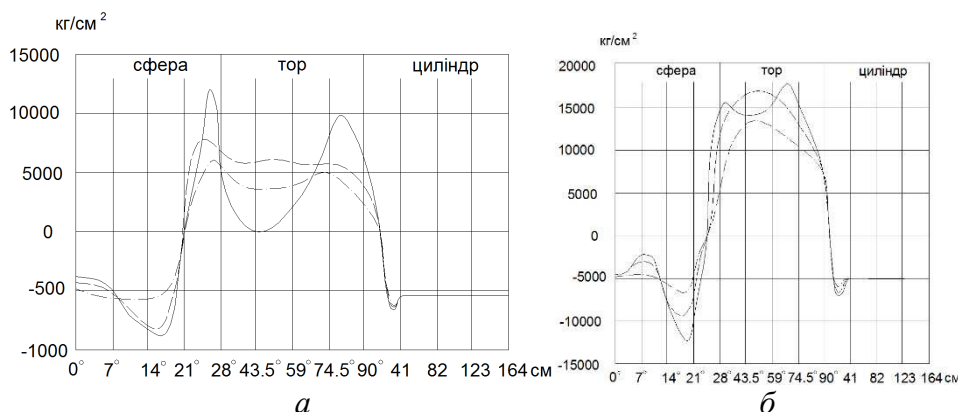


Рис. 7. Епюри кільцевих напружень дозправочного балона:  
а – внутрішня поверхня; б – зовнішня поверхня

На сферичній і циліндричній частинах дозправочного балона одночасне врахування великих переміщень і пластичного деформування призводить до значного зростання напружень у зонах моментного стану.

Розподіл інтенсивності дотичних напружень по внутрішній і зовнішній поверхнях оболонки, а також характер розвитку зон пластичності по товщині представлені на рис. 8. Умовні позначення прийняті відповідно до рис. 5. На рис. 8, в одинарним штрихуванням показана зона пластичності, визначена в геометрично нелінійній постановці, подвійним – зони пластичних деформацій, отримані з урахуванням впливу значних переміщень.

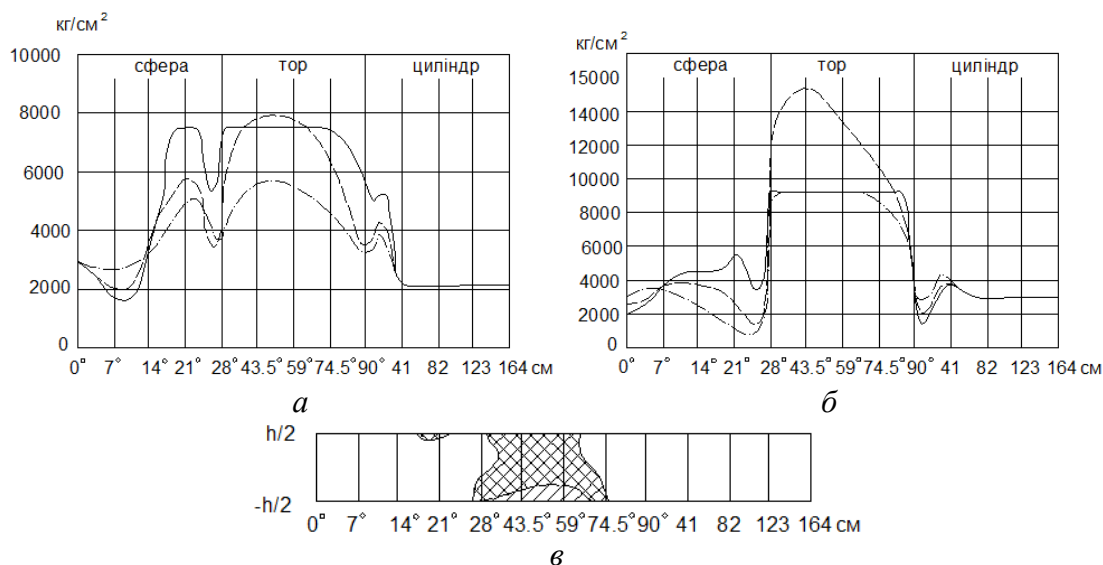


Рис. 8. Розподіл інтенсивності дотичних напружень дозправочного балона:  
а – внутрішня поверхня; б – зовнішня поверхня; в – характер розвитку зон пластичності

Наведені графіки переконливо свідчать про необхідність при розрахунку подібного роду конструкцій брати до уваги обидва види нелінійності. Так, інтенсивність дотичних напружень, обчислена на підставі припущення про пружну роботу матеріалу, значно перевищує величину  $\tau_s$ , що допускається для використовуваних марок сталі й у реальності не може мати місця. Водночас розподіл інтенсивності дотичних напружень і розвиток зон пластичності, отриманий без врахування значних переміщень, спотворює реальну картину і може бути підставою для неправильних висновків про умови роботи окремих конструктивних елементів за проєктованого дозправочного балона. Наприклад, відпо-

відно до даних такого розрахунку сферична оболонка перебуває при розглянутому навантаженні в пружній стадії роботи матеріалу, зона пластичності носить поверхневий характер і лише стикається з лінією стику сферичної і тороїдальної ділянок конструкції. Проте картина пластичного деформування, одержувана з урахуванням геометричної нелінійності, значно відрізняється, причому в бік погіршення умов роботи конструкції. Так, пластичні деформації в цьому випадку розповсюдились на всю товщину тороїдальної ділянки, що призвело до виникнення пластичного шарніра, перетнули лінію стику й навіть утворили нову зону пластичності на зовнішній поверхні сферичного елемента.

Підсумовуючи сказане раніше можна сформулювати такі основні висновки щодо розрахунку розглянутої конструкції занурюваного дозাপравочного балона:

1. У прийнятому діапазоні зміни товщини оболонки й характеристик матеріалу при визначенні критичних навантажень необхідно враховувати як фізичну, так і геометричну нелінійність.

2. Навантаження, що відповідає виникненню пластичних деформацій, у більшій частині прийнятого діапазону зміни параметрів можна оцінювати на підставі лінійного розрахунку. Однак для товщини порядку 2 см і  $\tau = 9000$  кг/см<sup>2</sup> необхідно враховувати великі переміщення.

Другий тип глибоководного апарату призначений для виконання рятувальних операцій і передбачає занурення на більші глибини. Конструкція рятувального апарату (рис. 9, а) являє собою систему, складену з трьох сферичних оболонок постійного радіуса, центри яких розташовані один від одного на відстані  $z_c = 200$  см.

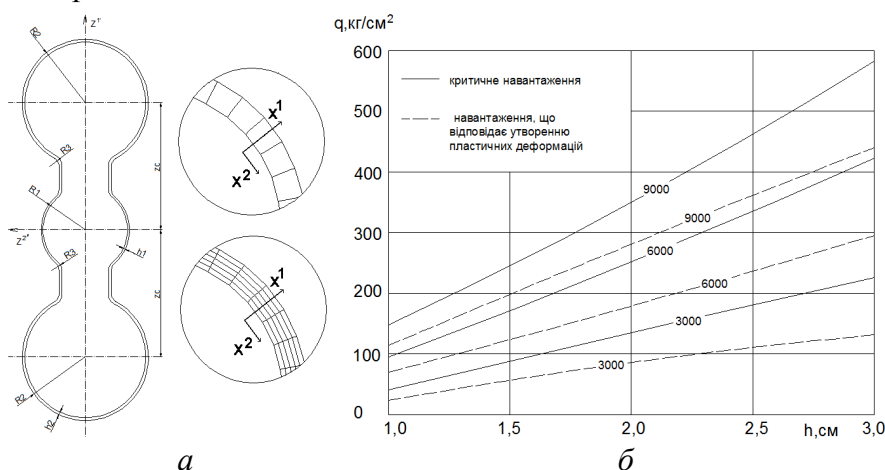


Рис. 9. Рятувальний апарат (а), залежність  $P_k$  і  $P_m$  від товщини  $h_1$  (б)

Радіус серединної поверхні центральної сфери  $R_1 = 70$  см, радіуси двох периферійних  $R_2 = 100$  см. Сфери з'єднані між собою двома циліндричними оболонками змінної товщини, радіуси серединної поверхні яких становить 50 см. Стик циліндрів і сфер виконано за допомогою елементів тороїдальної оболонки радіусом  $R_3 = 15$  см. Товщина центральної сфери та прилеглих до неї тороїдальних елементів  $h_1$ , товщина периферійних сфер і тороїдальних ділянок  $h_2$  становить  $1,5h_1$ . Товщина циліндричних оболонок лінійно змінюється вздовж утворюючої від  $h_1$  до  $h_2$ . Модуль пружності  $E = 205939,65$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Були розглянуті оболонки товщиною  $h_1$  від 1 до 3 см із фізично і геометрично нелінійною постановкою при трьох значеннях  $\tau_s = 3000, 6000$  і  $9000$  кг/см<sup>2</sup>.

Оболонка апроксимувалась 70 СЕ в меридіональному напрямку (40 – на периферійній сферичній ділянці, по 5 – на тороїдальних, 10 – на циліндричній і 10 – на ділянці центральної сфери) і одним СЕ по товщині.

Результати розрахунку представлені на рис. 9, б у вигляді кривих, що відображають залежність  $P_k$  і  $P_m$  від товщини  $h_1$ . Умовні позначення ті ж самі, що і на рис. 4. Загалом

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

вигляд кривих і якісний характер залежності співвідношень  $R_k/R_k(3000)$ ,  $P_t/P_t(3000)_t$ ,  $R_k/P_t$ ,  $P_k/P_k^I$ ,  $P_t/P_t^I$ , від  $h_1$  і  $\tau_s$  подібні до наведених раніше для конструкції дозправочного балона. Проте кількісні показники свідчать про значно менший вплив врахування геометричної нелінійності на результати розрахунку рятувального апарату в прийнятому діапазоні зміни параметрів. Оскільки відношення  $R_k/R_k(3000)$  ( $h_1 = 1 \text{ см}$ ,  $\tau_s = 9000 \text{ кг/см}^2$ ) становить 2.71, що дає змогу зробити висновок про близьку до пропорційної залежності критичного навантаження від величини  $\tau_s$ . Мінімальне значення  $P_k/P_k^I = 0,84$ .

Слід відзначити також зменшення відношення  $R_k/P_t$ , максимальне значення якого не перевищує 1,44.

Таким чином, для конструкції рятувального апарату справедливі такі положення:

1. У прийнятому інтервалі зміни  $h_1$  і  $\tau_s$  навантаження, що відповідають виникненню пластичних деформацій, можна визначати на основі лінійного розв'язку.

2. Критичні навантаження, в основному, допускається обчислювати без врахування великих переміщень. Для оболонок з товщиною і характеристиками матеріалу близькими до  $h_1 = 1 \text{ см}$  і  $\tau_s = 9000 \text{ кг/см}^2$  необхідно враховувати геометричну нелінійність, оскільки похибка в цьому випадку становить приблизно 20 %.

**Урахування великих пластичних деформацій при чисельному моделюванні процесу витяжки циліндричного стакану.** Для підтвердження достовірності результатів розв'язання задачі формозмінення тонкостінних тіл обертання була вирішена задача про напружено-пластичне деформування круглої пластини жорстким штампом у циліндричний стакан рис. 10.

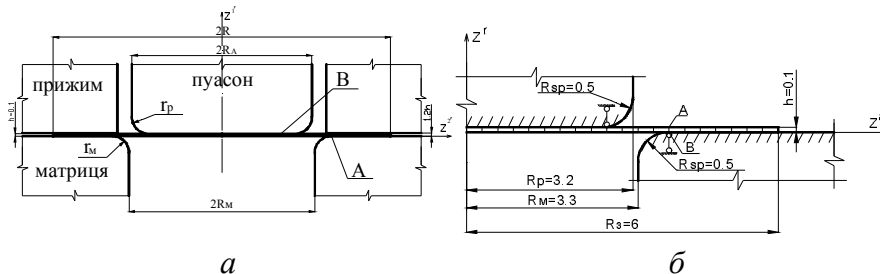


Рис. 10. Стенд витяжки круглої пластини в циліндричний стакан (а), розрахункова схема процесу витяжки (б)

Витяжка виконується за допомогою матриці й пуансона, який давить на середню частину заготовки, втягуючи її в матрицю. Робочі кромки матриці й пуансона скруглені дугами кіл, радіуси яких у декілька раз більші товщини заготовки (рис. 11).

Моделювання процесу витяжки пов'язане з істотними складностями, оскільки для отримання задовільної картини напружено-деформованого стану необхідне одночасне врахування декількох факторів, таких як зміна форми заготовки, яке супроводжується зміною умов контакту з інструментом по мірі збільшення глибини витяжки, наявність зон пластичності тощо.

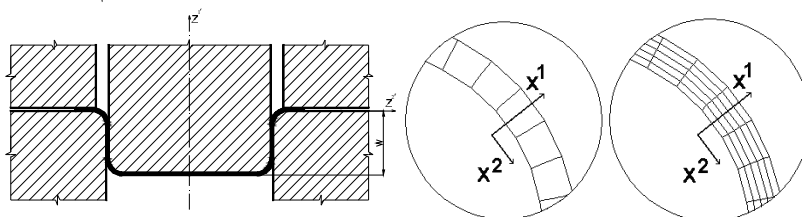


Рис. 11. Циліндричний стакан

При витяжці можливе формозмінення пластинки, зазвичай, обмежується її розривом, у тому місці, де діє найбільше за величиною розтягуюче меридіальне

напруження ( $\sigma^{2'2'}_{\max}$ ) [9]. Для цього при вивченні процесу витяжки особливу увагу потрібно приділити дослідженню факторів, які впливають на величину цих напружень і пов'язаних з ним зусиллям витяжки. Останнє є валивим моментом при підборці параметрів інструмента. Одним із таких факторів, що дозволяє суттєво змінити картину напруженого стану розглянутого процесу, є збільшення або зменшення геометричних розмірів інструмента, наприклад, радіуса скруглення матриці ( $r_m$ ) і пуансона ( $r_p$ ), зміну діаметра стакану, що витягується ( $R_m$ , рис. 10, а).

Результати, отримані в процесі апробування розроблених алгоритмів, порівнювалися з результатами, які наведені в роботі [10]. Крім цього, існують методики, в яких автори пропонують обчислювати основні параметри процесу формозмінення круглих пластин за наближеними формулами [9]. При виведенні останніх використовувались вагомні спрощення як при виборі розрахункової схеми, так і при виведенні співвідношень на основі моментної теорії оболонки. З ними також були проведені порівняння результатів і оцінювання якісної картини стану круглої пластини в процесі деформування її жорстким штампом. Розрахункова схема процесу витяжки показана на рис. 10, б.

Геометричні розміри штапу, пластини, умови закріплення й інші умови повністю збігаються з умовами контрольного прикладу. Фізико-механічні характеристики матеріалу: модуль пружності  $E = 196133$  МПа, коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0,3$ . Витяжка пластини здійснюється до глибини  $6,1h$ , по товщині пластини прийнятий один СЕ.

На першому етапі для отримання стабільних результатів було досліджено вплив точності розв'язку системи нелінійних рівнянь, характеристикою якої є число  $\varepsilon$ , величина кроку  $\Delta u$ , кількість розбивки на СЕ пластини по довжині, на основні параметри процесу витяжки – силу витяжки  $P$  і максимальні розтягуючі і стискаючі меридіальні ( $\sigma^{2'2'}$ ) і кругові ( $\sigma^{3'3'}$ ) напруження. Результати досліджень наведені в табл. 2. Встановлено, що результати, отримані при  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $N = 80$ ,  $\Delta u = 0,005$ , є стійкими і подальша зміна  $\varepsilon$ ,  $N$ ,  $\Delta u$  недоцільна.

Таблиця 2

Розв'язки системи нелінійних рівнянь при витяжці циліндричного стакану

	N			$\varepsilon$			$\Delta u$		
	20	40	80	0,01	0,001	0,0001	0,01	0,005	0,0025
P (кН)	33,96	32,10	30,90	29,74	30,90	31,35	32,87	30,90	30,86
	99 %	3,9 %	—	5,1 %	1,4 %	—	6,5 %	0,1 %	—
$\sigma^{2'2'}_{\max}$ (МПа)	4,35	4,53	4,68	4,30	4,68	4,76	4,61	4,68	4,71
	7,1 %	3,2 %	—	9,8 %	1,8 %	—	7,1 %	0,6 %	—
$\sigma^{3'3'}_{\max}$ (МПа)	4,00	3,47	3,34	3,50	3,34	3,28	3,04	3,34	3,42
	20,4 %	1,1 %	—	6,6 %	1,8 %	—	1,11 %	2,4 %	—

На рис. 12, а, б представлені епюри кругових і меридіальних напружень при глибині витяжки, рівній  $6,1h$ , по товщині елемента ( $N$ ), який у процесі деформування терпить найбільших змін напружено-деформованого стану.

На рис. 12 цей результат представлений суцільною лінією, а пунктирною лінією позначені дані, наведені в роботі [10].

При деформуванні пластини до глибини  $30h$  елемент В (рис. 12, в), розміщений спершу на горизонтальній частині матриці, переходить на вертикальну стінку. При цьому в ньому розвиваються значні пластичні деформації. Шляхи деформування точок А і В належать відповідно верхньому і нижньому волокну рис. 12, в. Порівняння напружень і шляхів деформування окремих точок показало добрий збіг.

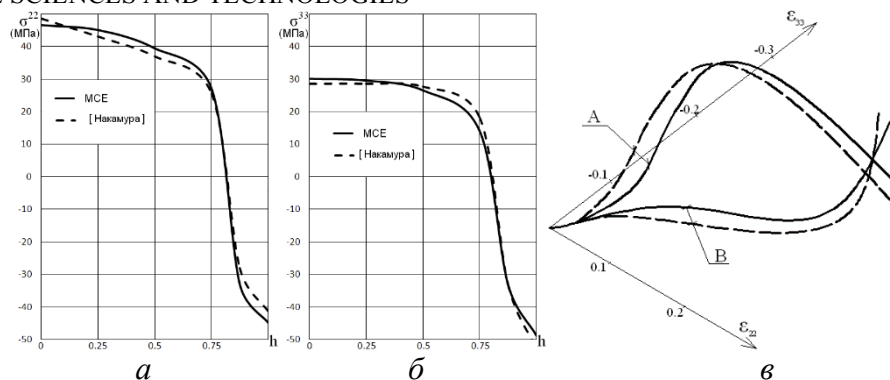


Рис. 12. Епюри кругових (а) і меридіальних (б) напружень від глибини витяжки, деформування пластини до глибини 30h (в)

Згідно з наявними методиками за наближеними формулами були обчислені значення максимального меридіального напруження  $\sigma_{\max}^{22}$  при витяжці до глибини, рівній  $6,1h$ . Виявилось, що різниця  $\sigma_{\max}^{33}$  наведеного в контрольному прикладі, і результатів, отриманих відповідно до розробленої методики, становить 1,1%. Ця різниця обґрунтовується використанням різних вихідних співвідношень.

У роботі [10] прийняті співвідношення теорії тонких оболонок, а при використанні одного СЕ по товщині, як показано в роботі [11], МСЕ еквівалентний теорії оболонок середньої товщини типу Рейсснера. Використання цієї теорії є більш обґрунтованим, оскільки в зоні контакту відношення товщин оболонки до радіуса скруглення досягає в процесі формозмінення  $1/5$ . Різниця у вибраних вихідних співвідношеннях можна обґрунтувати збільшенням у контрольному прикладі згинаючої складової напруження в зоні контакту з інструментом.

Крім цього, було проведено порівняння результатів, отриманих за методиками на основі МСЕ з величинами меридіальних максимальних напружень  $\sigma_{\max}^{22}$ , обчислених за наближеним формулам [9]. З'ясувалось, що в цьому випадку результати розрахунку [9] суттєво занижені за рахунок згинаючої складової напружень (табл. 3). Якісна картина напружено-деформованого стану добре узгоджується з експериментальними даними, наведеними автором роботи [12].

Таблиця 3

Меридіальні напруження  $\sigma_{\max}^{22}$  при витяжці до глибини, рівній  $6,1h$

	$\sigma^{22}$ (кг/мм <sup>2</sup> )	$\sigma^{22}$ (кг/мм <sup>2</sup> )	$\sigma^{22}_{(MEM)}$ (кг/мм <sup>2</sup> )
МСЕ	46,80	28,06	18,74
Накамура, [10], (МСЕ)	49,00	27,50	21,50
Попов А.Е.	25,68	20,23	5,45

**Висновки відповідно до статті.** Розроблена методика чисельного моделювання процесів пружно-пластичного деформування і формозмінення тіл обертання з урахуванням контакту взаємодіючих поверхонь у вигляді комплексу програм, забезпечує високий рівень автоматизації всіх етапів виконання розрахунку. Аналіз результатів розв'язку контрольних прикладів показав достовірність, універсальність і ефективність використання методики і розробленого комплексу до моделювання процесів деформування тонкостінних об'єктів, що супроводяться істотним формозміненням за рахунок деформацій пластичності. Викладена методика дозволяє з високою точністю визначати напружено-деформований стан складених оболонок обертання середньої товщини у фізичній і геометрично нелінійних постановках при використанні одного СЕ по товщині.

**Список використаних джерел**

1. Баженов В. А. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей. – К. : ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.

2. *Баженов В. А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, О. С. Сахаров, С. О. Пискунов, Ю. В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2014. – Вип. 92. – С. 3-16.

3. *Максим'юк Ю. В.* Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості / Ю. В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2017. – Вип. 99. – С. 13-25.

4. *Максим'юк Ю. В.* Постановка задачі про вплив геометричної нелінійності на несучу здатність і закритичну поведінку тонкостінних та комбінованих вісесиметричних тіл / Ю. В. Максим'юк // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2016. – Вип. 97. – С. 50-59.

5. *Сахаров А. С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюкий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.

6. Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // *Опір матеріалів і теорія споруд*. – 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.

7. *Соколовский В. В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.

8. *Маркол, Р. В.* Определение больших прогибов упругопластических оболочек вращения / Р. В. Маркол // *Ракетная техника и космонавтика*. – 1970. – № 9. – С. 113–121.

9. *Пальмов В. А.* Колебания упруго-пластических тел / В. А. Пальмов. – М.: Наука, 1976. – 328 с.

10. *Накамура Я.* Анализ упруго-пластической деформации листовых металлов при глубокой вытяжке через матрицу путем рассмотрения обтекания листовым металлом профилей и пуансона / Я. Накамура, Т. Татэнами, К. Сайто // *Cocey to kako, J. Jap. Soc. Technol. Plast.* – 1978. – 19, № 213. – С. 890–896.

11. *Романов К. И.* Ползучесть и разрушение цилиндрической оболочки при больших деформациях / К. И. Романов // *Машиноведение*. – 1982. – № 2. – С. 78–82.

12. *Мелещенко А. Г.* Конечноэлементный анализ явлений в плоском контакте упругих шероховатых тел под действием нормальных и касательных нагрузок / А. Г. Мелещенко // *Рук. Деп. ВИНТИ 1977, №2881-77 Деп.* – С. 17.

### References

1. Bazhenov, V. A., Kryvenko, O. P., & Solovej, M. O. (2010). *Neliniine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury* [Nonlinear deformation and stability of elastic membranes of non-uniform structure]. Kyiv: ZAT «Vipol» [in Ukrainian].

2. Bazhenov, V. A., Huliar, O. I., Sakharov, O. S., Pyskunov, S. O., Maksimyuk, Yu. V. (2014). Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry neliniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn [Features application circuit moment finite element (MSSE) nonlinear calculations of plates and shells]. *Opir materialiv i teoriia sporud – Strength of Materials and Theory of Structures*, 92, 3–16 [in Ukrainian].

3. Maksimyuk, Yu. V. (2017). Indyferentnist tensoriv deformatsii, napruzhen ta yikh pryroshchen pry umovi enerhetychnoi spoluchenosti [Indifference of strain and stress tensors and their increments under condition of energy compability]. *Opir materialiv i teoriia sporud – Strength of Materials and Theory of Structures*, 99, 13–25 [in Ukrainian].

4. Maksimyuk, Yu. V. (2016) Postanovka zadachi pro vplyv heometrychnoi neliniinosti na nesuchu zdatnist i zakrytychnu povedinku tonkostinnykh ta kombinovanykh visesymetrychnykh til [Statement of the problem of effect of geometric nonlinearity on load capacity and supercritical behaviour of thin-wall and combined axisymmetrical bodies]. *Opir materialiv i teoriia sporud – Strength of Materials and Theory of Structures*, 97, 50–59 [in Ukrainian].

5. Saharov, A. S., Kislookij, V. N., Kirichevskij, V. V. (1982). *Metod konechnykh jelementov v mehanike tverdyh tel* [The finite element method in the mechanics of solids]. Kyiv: Vishha shkola [in Ukrainian].

6. Pyskunov, S. O., Solodei, I. I., Maksimyuk, Yu. V., Solodenko, A. D. (2013). Osoblyvosti vykorystannia momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry liniinykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn [Features application moment finite element sheme (MSSE) for linear calculations of plates and shells]. *Opir materialiv i teoriia sporud – Strength of Materials and Theory of Structures*, 91, 59–75 [in Ukrainian].

7. Sokolovskii, V. V. (1969) *Teoriia plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow: Vysshaia shkola [in Ukrainian].

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

8. Markol, P. V. (1970). Opredelenie bol'shikh progibov uprugo-plasticheskikh obolochek vrashheniya [Determination of large deflections of elastic-plastic shells of revolution]. *Raketnaia tekhnika i kosmonavtika – Missile technology and astronautics*, 9, 113–121 [in Russian].

9. Palmov, V. A. (1976). *Kolebaniia uprugo-plasticheskikh tel [Oscillations of elastic-plastic bodies]*. Moskov: Nauka [in Russian].

10. Nakamura, Ja., Tatjenami, T., Saito, K. (1978). Analiz uprugo – plasticheskoy deformacii listovih metallov pri glubokoj vytjazhke cherez matricu putem rasmotreniya obtekanija listovym metallom profelej i puasona [Analysis of the elastoplastic deformation of sheet metals during deep drawing through the matrix by means of a review of the flow past sheet metal of the profiles and punch]. *Cocey to kako, J. Jap. Soc. Technol. Plast*, 19, 213, 890–896 [in Russian].

11. Romanov, K. I. (1982). Polzuchest' i razrusheniye cilindricheskoy obolochki pri bol'shikh deformacijah [Creep and failure of a cylindrical shell at large deformations]. *Mashinovedinie – Engineering Science*, 2, 78–82 [in Russian].

12. Meleshhenko, A. G. (1977). Konechnoelementnyi analiz iavlenii v ploskom kontakte uprugikh sherokhovatyh tel pod deksstviem normalnykh i kasatelnykh nagruzok [Finite-element analysis of phenomena in the plane contact of elastic rough bodies under the influence of normal and tangential loads]. *Ruk. Dep. VINITI*, 2881-77, 17 [in Russian].

UDC 539.376

Alexander Gulyar, Sergey Piskunov, Yurii Maksimiyuk

### INVESTIGATION OF NONLINEAR DEFORMATION OF COMPLICATED MEDIUM THICKNESS ROTATION SHELLS

**Urgency of the research.** Based on the literature review, it can be argued that, to date, the problem of studying of nonlinear deformation of complicated shells of rotation of medium thickness is not considered sufficiently. The calculation of shells as systems with complicated structure cause not only computational but also fundamental methodological difficulties. The solution of this problem leads to necessity of creation of new universal calculation models. Most successfully, this problem can be solved by Finite Element Method (FEM) based on the implementation of the Moment Scheme of Finite Element Method (MFEM).

**Target setting.** The modern development of computer technology stimulates the development of new refined research methods for shells that have a wider range of uses than traditional methods of calculating individual classes of shells. The development of automated software systems, which are a necessary tool for practical solution to the problem through numerical research are important.

**Actual scientific researches and issues analysis.** Classical works and modern publications in domestic and foreign sources, corresponding to this problem were considered both.

**Uninvestigated parts of general matters defining.** Implementation of methods for studying of nonlinear deformation process of complicated shells of rotation of medium thickness.

**The research objectives.** On the basis of MFEM, the method of solving of stress-strain state problem of the selected class shells of rotation taking into account physical and geometric non-linearity is realized.

**The statement of basic material.** Based on the initial relationships of the spatial problem of the theory of elasticity and MFEM technique, an effective approach to the stress-strain state determination of complicated shells of rotation of the medium thickness in the presence of large displacements and deformations of plasticity is given. It is shown by comparing with spatial solutions that the developed method allows to obtain reliable results, providing a significant reduction in computing costs.

**Conclusions.** The analysis of decision results of control examples showed the reliability, universality and efficiency of the methodology and the developed software to simulate the processes of deformation of thin-walled objects, which are accompanied by a significant form change due to plasticity deformation.

**Keywords:** finite element method, moment scheme of finite elements; plasticity; complicated shells of rotation of medium thickness; geometric nonlinearity; immersion apparatus; extraction of cylindrical glass.

Fig.: 12. Table: 3. References: 12.

УДК 539.376

Александр Гулярь, Сергей Пискунов, Юрий Максимюк

### ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

**Актуальность темы исследования.** Исходя из обзора литературы, можно утверждать, что на сегодняшний день проблема исследования нелинейного деформирования сложных оболочек вращения средней толщины освещены недостаточно полно. Расчет оболочек как систем с усложненной структурой вызывают не только вычислительные, но и принципиальные методические трудности. Их решение приводит к необходимости создания новых универсальных расчетных моделей. Успешно эта проблема может быть решена методом конечных элементов (МКЭ) на основе реализации методики моментной схемы конечных элементов (МСКЭ).

**Постановка проблеми.** Современное развитие вычислительной техники стимулирует разработку новых уточненных методов исследования оболочек, имеющих широкий круг использования, чем традиционные методы расчета отдельных классов оболочек. Важное значение приобретает разработка автоматизированных программных комплексов, которые являются необходимым инструментом для практического решения рассматриваемой проблемы из-за проведения многочисленных исследований.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Были рассмотрены как классические работы, так и современные публикации в отечественных и зарубежных источниках, соответствующие данной проблематике.

**Выделение неисследованных частей общей проблемы.** Реализация методики исследования нелинейного деформирования составных оболочек вращения средней толщины.

**Постановка задачи.** На основе МСКЕ реализуется методика решения задачи о напряженно-деформированном состоянии выделенного класса оболочек вращения с учетом физической и геометрической нелинейности.

**Изложение основного материала.** На основе исходных соотношений пространственной задачи теории упругости и методики МСКЕ приведен эффективный подход к определению напряженно-деформированного состояния составных оболочек вращения средней толщины при наличии больших перемещений и деформаций пластичности. Путем сравнения с пространственными решениями показано, что разработанная методика позволяет получать достоверные результаты, обеспечивая существенное уменьшение вычислительных затрат.

**Выводы в соответствии со статьей.** Анализ результатов решения контрольных примеров показал достоверность, универсальность и эффективность использования методики и разработанного программного комплекса к моделированию процессов деформирования тонкостенных объектов, сопровождающиеся существенным формоизменением за счет деформаций пластичности.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов; моментная схема конечных элементов; пластичность; составные оболочки вращения средней толщины; геометрическая нелинейность; погружаемые аппараты; вытяжка цилиндрического стакана.

Рис.: 12. Табл.: 3. Библ.: 12.

**Гуляр Олександр Іванович** – доктор технічних наук, професор, Київський національний університет будівництва і архітектури (просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна).

**Гуляр Александр Иванович** – доктор технических наук, профессор, Киевский национальный университет строительства и архитектуры (просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина).

**Gulyar Alexander** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kyiv National University of Construction and Architecture (31 Povitroflotsky Av., 03680 Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** agulyar@ukr.net

**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-7644-436X>

**ResearcherID:** L-9700-2018

**Scopus Author ID:** 6602718875

**Пискунов Сергій Олегович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки, заступник директора, Науково-дослідний інститут будівельної механіки КНУБА (просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна).

**Пискунов Сергей Олегович** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики, заместитель директора, Научно-исследовательский институт строительной механики КНУСА (просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина).

**Piskunov Sergey** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Department of Structural Mechanics, Deputy Director, Research Institute of Structural Mechanics KNUBA (31 Povitroflotsky Av., 03680 Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** s\_piskunov@ua.fm

**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0003-3987-0583>

**ResearcherID:** M-2524-2018

**Scopus Author ID:** 7004154344

**Максим'юк Юрій Всеволодович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки заступник декана будівельного факультету, Київський національний університет будівництва і архітектури (просп. Повітрофлотський, 31, м. Київ, 03680, Україна).

**Максимюк Юрий Всеволодович** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительной механики, заместитель декана строительного факультета, Киевский национальный университет строительства и архитектуры (просп. Воздухофлотский, 31, г. Киев, 03680, Украина).

**Maksimyuk Yurii** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Structural Mechanics, deputy dean of the building faculty, Kyiv National University of Construction and Architecture (31 Povitroflotsky Av., 03680 Kyiv, Ukraine).

**E-mail:** maximyuk@ukr.net

**ORCID:** <http://orcid.org/0000-0002-5814-6227>

**ResearcherID:** L-9641-2018

**Scopus Author ID:** 37087356800