

УДК 528.3

DOI: 10.25140/2411-5363-2019-3(17)-292-302

Сергій Крячок, Людмила Мамонтова, Юлія Щербак

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩ ЗЕМЕЛЬНИХ ДІЛЯНОК ПОЛЮСНИМ МЕТОДОМ

Актуальність теми дослідження. Визначення площ територій є одним із головних завдань геодезичного супроводу землеустрою. Достовірність інформації про земельні ресурси безпосередньо пов'язана з точністю визначення площ земельних угідь. Необхідність у визначенні площі виникає і під час вирішення містобудівних завдань, проведення рекреаційних робіт, вертикального планування будівельних майданчиків, прогнозування територій підтоплення та лісових пожеж.

Постановка проблеми. Є такі методи визначення площ: графічний, інструментальний, аналітичний. Графічний метод передбачає застосування спеціально розграфлених палеток із прозорого матеріалу, які накладаються на картографічне зображення ділянки. Площу підраховують за кількістю елементарних фігур у вигляді прямокутників з відомою площею. Інструментальний метод потребує використання механічних чи електронних планіметрів. Площа ділянки на її картографічному зображенні визначається після обведення контуру спеціальним важелем з маркою за різницею відліків за шкалою планіметра. Найбільш точним є аналітичний метод. Він передбачає визначення площі ділянки за координатами точок, розташованих на контурі ділянки, з використанням відповідного математичного апарату.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Були розглянуті останні публікації у відкритому доступі, які присвячені точності визначення площ аналітичним методом.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Недослідженою є точність визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційних залежностей між суміжними горизонтальними кутами, вимірними на межових знаках.

Мета статті. Головною метою статті є теоретичне обґрунтування точності визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційної залежності між суміжними горизонтальними кутами, вимірними на межових знаках.

Виклад основного матеріалу. Виконано теоретичне обґрунтування визначення площ земельних ділянок у вигляді багатокутників полюсним методом з урахуванням вимірних горизонтальних кутів та довжини базису. На основі отриманих формул визначено вирази для часткових похідних. З урахуванням кореляційної залежності між горизонтальними кутами виведені формули для визначення середньої квадратичної похибки визначення площ земельних ділянок із конфігурацією меж у вигляді багатокутника. Виконано спрощення загальних формул для визначення точності площ ділянок у вигляді правильного трикутника та п'ятикутника, прямокутника, квадрата. Наведено розрахунки точності площ земельних ділянок для вказаних фігур за спрощеними формулами.

Висновки відповідно до статті. Виконано теоретичне обґрунтування точності визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційної залежності між горизонтальними кутами, вимірними на межових знаках. Загальні формули спрощені для випадків конфігурації меж у вигляді правильного трикутника та п'ятикутника, прямокутника та квадрата. Наведено приклади обчислення точності визначення площ для вказаних фігур.

Ключові слова: полюсний метод; площа земельної ділянки; коефіцієнт кореляції.

Рис.: 3. Бібл.: 14.

Актуальність теми дослідження. Визначення площ територій є одним із головних завдань геодезичного супроводу землеустрою. Достовірність інформації про земельні ресурси безпосередньо пов'язана з точністю визначення площ земельних угідь. Необхідність у визначенні площі виникає і під час вирішення містобудівних завдань, проведення рекреаційних робіт, будівництва доріг, вертикального планування будівельних майданчиків, прогнозування територій підтоплення та лісових пожеж.

Постановка проблеми. Є такі методи визначення площ: графічний, інструментальний, аналітичний [1; 2].

Графічний метод передбачає застосування спеціально розграфлених палеток із прозорого матеріалу, які накладаються на картографічне зображення ділянки. Площу підраховують за кількістю елементарних фігур у вигляді прямокутників з відомою площею. Якщо контури ділянки утворені відрізками прямих ліній, то ділянку можна розчленувати на окремі трикутники, площі яких обчислюються за відомими формулами.

Інструментальний метод потребує використання механічних чи електронних планіметрів. Площа ділянки на її картографічному зображенні визначається після обведення її контуру спеціальним важелем із маркою за різницею відліків за його шкалою, помноженою на ціну поділки шкали планіметра.

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

Найбільш точним є аналітичний метод. Він передбачає визначення площі ділянки за координатами точок, розташованих на контурі ділянки з використанням відповідного математичного апарату.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У публікації [3] проведено аналіз формул із розрахунку середніх квадратичних похибок (СКП) визначення площ земельних ділянок за координатами межових знаків. Встановлено, що наведені в цьому джерелі формули, по суті, є подібними, але відрізняються різними аргументами (площа ділянки, довжина межі, довжина діагоналі). Запропоновано нову формулу для визначення площі земельної ділянки, координати межових знаків якої визначаються за допомогою GPS, а саме

$$m_p = \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n l_i^2}, \quad (1)$$

де m_p – СКП визначення площі ділянки, m – СКП визначення координат межових знаків, l – горизонтальні відстані між межовими знаками.

У статті [4] наведено формулу для обчислення СКП площі:

$$m_p = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum d_i^2 - \sum d_{i-1} d_{i+1} \cos \beta}, \quad (2)$$

де d_i – довжина межі земельної ділянки, β – кут між суміжними межами.

На нашу думку, формула (2) дозволяє точніше визначити СКП площі, оскільки враховує значення кутів на поворотах меж.

У публікації [5] виконана прив'язка точності планового положення межового знаку m_t до вартості земельної ділянки прямокутної форми та виведена формула:

$$m_t = \frac{m_{\mathcal{L}_0}}{4 \cdot \mathcal{L}_0} \sqrt{\frac{2P \cdot k}{1 + k^2}}, \quad (3)$$

де $m_{\mathcal{L}_0}$ – СКП визначення ціни 1 м² земельної ділянки; \mathcal{L}_0 – ціна 1 м² земельної ділянки; k – коефіцієнт видовження (відношення довжини земельної ділянки до її ширини).

Праця [6] присвячена визначенню площ і точності визначення площ об'єктів нерухомості: багатокутної форми за координатами вершин; за кутовими, лінійними вимірами та за визначенням різниць координат, що мають форму елементарних фігур. Розглянуто питання редуції площ на поверхню земного еліпсоїда, обчислення площі горизонтальної проекції ділянки та площі фізичної поверхні ділянки. Звернуто увагу на визначення площ ділянок на планах і картах.

У монографії [7] висвітлено стан та проблеми визначення площ територій. Запропоновано провести класифікацію земель за величиною їх територій. Також наведено класифікацію методів визначення площ за інструментальними засобами вимірювань та способом редукування територій на поверхню відносності. Виконано обґрунтування строгих математичних методів визначення та оцінки точності визначення площ земель за координатами вершин контурів. Враховано редуцію територій на горизонтальну площину методом ортогонального проектування, на площини картографічних проекцій та на поверхню земного еліпсоїда.

У джерелі [8] виконано теоретичне обґрунтування полюсного методу визначення площ земельних ділянок. Метод ґрунтується на вимірюванні горизонтальних кутів на кожному межовому знаку в напрямку на два суміжні межові знаки та на висотний орієнтир у середині ділянки – полюс. Щоб задати масштаб полюсній фігурі, визнача-

ють як мінімум одну відстань між двома межовими знаками. Для прив'язки до систем координат визначають координати одного чи кількох межових знаків.

Приклад реалізації полюсного методу для визначення координат межових знаків та площі земельної ділянки за цими координатами наведено у джерелі [9].

Подальший розвиток полюсного методу з метою визначення відмітки висотної споруди – полюсу на приаеродромній території, наведено у статті [10]. Для цього на станції, крім відліків за горизонтальним кругом теодоліта чи електронного тахеометра, беруть відліки за вертикальним кругом та обчислюють кути нахилу в напрямку на висотну споруду. Визначення відміток (висот) висотних перешкод на приаеродромній території є актуальним для безпеки польотів повітряних суден [11].

Однак у публікаціях, присвячених теоретичному обґрунтуванню та реалізації полюсного методу, відсутня інформація про визначення точності площ земельних ділянок. Можна було б обчислювати точність визначення площі за відомими формулами, наприклад (2), які відповідають визначенню координат межових знаків через прокладання теодолітного чи полігонометричного ходу по знаках. У цьому випадку горизонтальні кути вимірюють способом прийомів і на кожному межовому знакові отримують один кут. У цьому випадку кожен кут вимірюється окремо та є незалежною величиною. Але в полюсному методі на кожному межовому знаку маємо три напрямки: два – на суміжні знаки та один в напрямку на полюс. Тому кути вимірюють способом кругових прийомів, отримують значення двох кутів, які через спільний напрямок – на полюс, корелюють між собою [12].

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Недослідженою є точність визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційних залежностей між суміжними горизонтальними кутами, виміряними способом кругових прийомів на межових знаках.

Мета статті. Головною метою цієї статті є теоретичне обґрунтування точності визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційної залежності між суміжними горизонтальними кутами, виміряними на межових знаках.

Виклад основного матеріалу. Нехай полюсна мережа має форму трикутника (рис. 1). Земельні ділянки такої форми, безумовно, рідкість, наприклад, у центрі ділянки розташована висока щогла, а в точках A , B , C знаходяться її розтяжки. Проте це одна з найпростіших фігур, з якої варто розпочати дослідження точності визначення площ земельних ділянок полюсним методом.

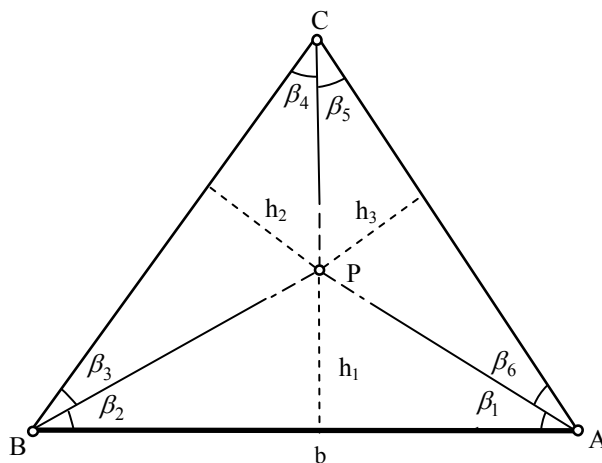


Рис. 1. Полюсна мережа у формі трикутника

Площа першого трикутника ABP (рис. 1) дорівнює

$$S_1 = \frac{b \cdot h_1}{2} = \frac{b \cdot AP \sin \beta_1}{2} = \frac{b^2 \sin \beta_1 \sin \beta_2}{2 \sin(\beta_1 + \beta_2)}. \tag{1}$$

Використовуючи такий же алгоритм обчислень, площі другого та третього трикутників дорівнюють

$$S_2 = \frac{b^2 \sin^2 \beta_1 \sin \beta_3 \sin(\beta_3 + \beta_4)}{2 \sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_4}, \tag{2}$$

$$S_3 = \frac{b^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin \beta_5 \sin(\beta_5 + \beta_6)}{2 \sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin \beta_6}. \tag{3}$$

Площа всієї фігури

$$P_3 = S_1 + S_2 + S_3. \tag{4}$$

На рис. 2 показано полюсні мережі у формі чотирикутника та п'ятикутника. Площа чотирикутника визначається за формулою

$$P_4 = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin \beta_3 \sin(\beta_3 + \beta_4)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_4} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin \beta_5 \sin(\beta_5 + \beta_6)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin \beta_6} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_5 \sin \beta_7 \sin(\beta_7 + \beta_8)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_6 \sin \beta_8} \right]. \tag{5}$$

Площа п'ятикутника дорівнює

$$P_5 = \frac{b^2}{2} \left[\frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin \beta_3 \sin(\beta_3 + \beta_4)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin \beta_4} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin \beta_5 \sin(\beta_5 + \beta_6)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin \beta_6} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_5 \sin \beta_7 \sin(\beta_7 + \beta_8)}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_6 \sin \beta_8} + \frac{\sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_5 \sin^2 \beta_7 \sin \beta_9 \sin(\beta_9 + \beta_{10})}{\sin^2(\beta_1 + \beta_2) \sin^2 \beta_4 \sin^2 \beta_6 \sin^2 \beta_8 \sin \beta_{10}} \right]. \tag{6}$$

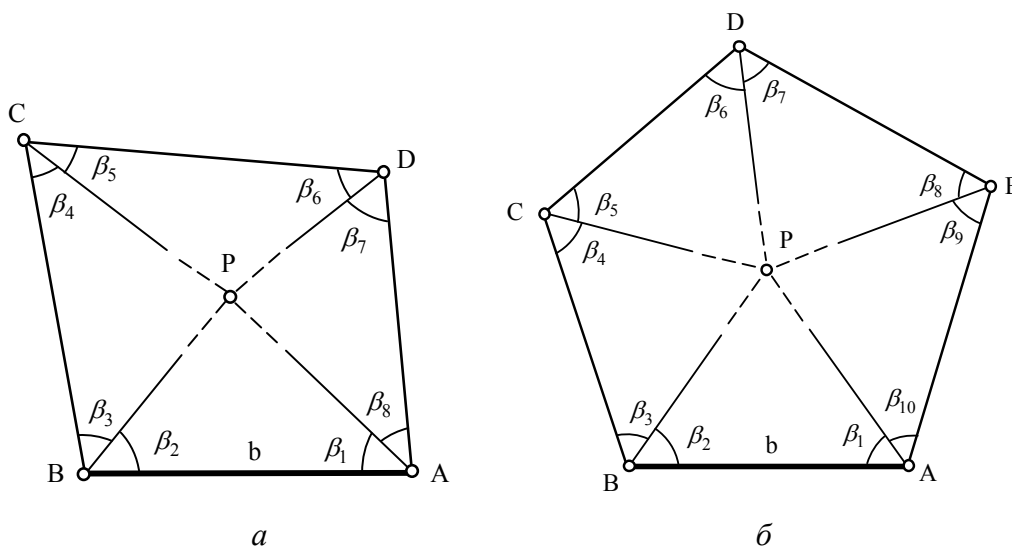


Рис. 2. Полюсні мережі у формі:
а – чотирикутника; б – п'ятикутника

З огляду на формули (3), (5), (6) можна помітити закономірність для написання формули площі полюсної фігури. Якщо нумерацію кутів у трикутнику виконувати згідно з рис. 3,

то кожна наступна фігура буде прибавляти доданок, що містить у чисельнику добутки: квадратів синусів непарних кутів, починаючи з першого до передостаннього та синуса останнього непарного кута на синус суми двох останніх кутів. У знаменнику знаходяться добутки: квадрата синуса суми першого та другого кутів на квадрати синусів парних кутів, починаючи з другого до передостаннього та синуса останнього парного кута.

Для обчислення середньої квадратичної похибки визначення площі ділянки за результатами вимірів полюсним методом необхідно знайти часткові похідні площі за окремими аргументами, користуючись формулами (3), (5) та (6). Тоді для полюсної мережі у вигляді багатокутника з n -сторонами можна записати

$$\frac{dP_n}{db} = 2P_n \frac{1}{b}, \quad (7)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_1} = (S_1 + 2S_2 + \dots + 2S_n)[ctg\beta_1 - ctg(\beta_1 + \beta_2)], \quad (8)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_2} = S_1 ctg\beta_2 - (S_1 + 2S_2 + \dots + 2S_n) ctg(\beta_1 + \beta_2), \quad (9)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_3} = S_2 ctg(\beta_3 + \beta_4) + (S_2 + 2S_3 + \dots + 2S_n) ctg\beta_3, \quad (10)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_4} = S_2 ctg(\beta_3 + \beta_4) - (S_2 + 2S_3 + \dots + 2S_n) ctg\beta_4, \quad (11)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_{(2i-1)}} = S_i \cdot ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i}) + (S_i + 2 \sum_{k=i+1}^n S_k) ctg\beta_{(2i-1)}, \quad (12)$$

$$\frac{dP_n}{d\beta_{2i}} = S_i \cdot ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i}) - (S_i + 2 \sum_{k=i+1}^n S_k) ctg\beta_{2i}, \quad (13)$$

де i – номер трикутника.

Необхідно врахувати попарні кореляційні зв'язки між парними та непарними номерами горизонтальних кутів, розташованих при кожній вершині (рис. 1 та 2). Такі кути вимірюються не окремо (незалежно один від одного), а способом кругових прийомів. У цьому випадку їх зв'язок визначається коефіцієнтом кореляції, який дорівнює $-0,5$ [13].

Загальна формула з визначення СКП площі за полюсним методом має вигляд:

$$m_{P_n}^2 = 4P_n^2 \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left[\sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{dP_n}{d\beta_m} \right)^2 - \sum_{m=1}^n \left(\frac{dP_n}{d\beta_{2m}} \right) \left(\frac{dP_n}{d\beta_{2m+1}} \right) \right], \quad (14)$$

де P_n – площа полюсної мережі, яка складається з n трикутників, m_b – СКП визначення довжини базису b , m_β – СКП вимірювання горизонтальних кутів, $\rho = 206265''$, m – поточний номер кута.

Спростити формулу (14) можна для фігур з рівними сторонами та вважати, що полюс P знаходиться в центрі фігури. Тоді внутрішні трикутники будуть рівнобедреними, а кути β_i – рівними. Оскільки сума внутрішніх кутів у замкненої фігури з n кутами дорівнює $180(n-2)$, а число виміряних кутів у полюсній мережі $2n$, то в цьому випадку величина кута становитиме

$$\beta = \frac{180^\circ(n-2)}{2n}. \quad (15)$$

Для рівностороннього трикутника $\beta=30^\circ$, $\beta_1+\beta_2=2\beta=60^\circ$, а $ctg30^\circ = \sqrt{3}$, $ctg60^\circ = \sqrt{3}/3$. Площі внутрішніх трикутників $S_1=S_2=S_3=S$. Тоді формула (14) для рівносторонньої трикутної полюсної мережі з полюсом, розташованим у центрі мережі, набуде вигляду для $S=P_3/3$

$$m_{P_3} = \sqrt{4P_3^2 \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{320}{3} S^2 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}} = 2P_3 \sqrt{\frac{m_b^2}{b^2} + \frac{80}{27} \cdot \frac{m_\beta^2}{\rho^2}} \quad (16)$$

Земельні ділянки в багатьох випадках мають форму прямокутника або конфігурацію, близьку до нього. Тому варто зупинитись на прямокутній полюсній мережі (рис. 3) з розмірами сторін a та b . Для подальших розрахунків необхідно ввести коефіцієнт видовження k , який характеризує відступ прямокутника від квадрата ($b>a$):

$$k = \frac{b}{a} \quad (17)$$

З рис. 3 зрозуміло, що

$$ctg\beta_1 = \frac{b}{a} = k, \quad (18)$$

$$ctg\beta_2 = \frac{a}{b} = \frac{1}{k} \quad (19)$$

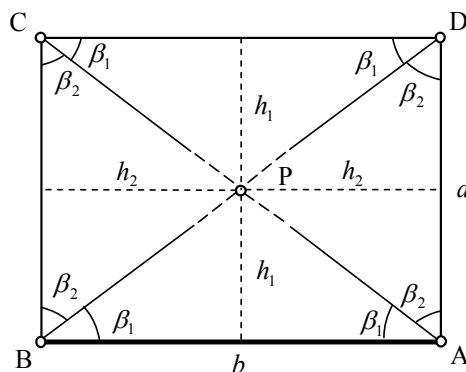


Рис. 3. Полюсна мережа у формі прямокутника

З елементарної математики відомо, що

$$ctg 2\beta = \frac{ctg^2 \beta - 1}{2ctg \beta} \quad (20)$$

Тоді, з урахуванням формул (18) - (20) суми кутів $ctg(\beta_{2i-1} + \beta_{2i})$ у формулах часткових похідних (8) – (13) будуть дорівнювати:

$$ctg 2\beta_1 = \frac{k^2 - 1}{2k}, \quad (21)$$

$$ctg 2\beta_2 = \frac{1 - k^2}{2k} \quad (22)$$

Площі внутрішніх трикутників (див. рис. 3), утворені сторонами прямокутника та напрямками на полюс та з врахуванням коефіцієнта видовження k , дорівнюють:

$$S = S_i = \frac{b \cdot h_1}{2} = \frac{a \cdot h_2}{2} = \frac{a^2 k}{4} \quad (23)$$

З урахуванням формул (7) – (13) та (18) – (23) значення часткових похідних по вимірних кутах прямокутної полюсної мережі приймуть вигляд:

$$\frac{dP_4}{d\beta_1} = \frac{7a^2(k^2 + 1)}{8}, \quad (24)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_2} = \frac{a^2(-5k^2 + 7)}{8}, \quad (25)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_3} = \frac{a^2(-k^2 + 11)}{8}, \quad (26)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_4} = \frac{-a^2(k^2 + 9)}{8}, \quad (27)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_5} = \frac{a^2(7k^2 - 1)}{8}, \quad (28)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_6} = \frac{-a^2(5k^2 + 1)}{8}, \quad (29)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_7} = \frac{a^2(-k^2 + 3)}{8}, \quad (30)$$

$$\frac{dP_4}{d\beta_8} = \frac{-a^2(k^2 + 1)}{8}. \quad (31)$$

Тоді, з урахуванням формул (14), (24)–(31) та значення площі прямокутника $P_{II} = a^2k$ ($a = \sqrt{\frac{P_{II}}{k}}$), СКП визначення площі полюсної мережі у формі прямокутника та полюсом у центрі мережі визначається за формулою:

$$m_{II} = P_{II} \sqrt{4 \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_\beta^2}{64\rho^2} (156k^2 + 168 + \frac{236}{k^2})}. \quad (32)$$

Оскільки існує обмеження на величини кутів $\beta \leq 30^\circ$, то значення коефіцієнта видовження не повинно перевищувати значення $k = \text{ctg}30^\circ = \sqrt{3}$, обчисленого за формулою (18).

Для полюсної мережі у формі квадрату ($k = b/a = a/a = 1$) з формули (32) впливає значення СКП визначення площі

$$m_K = a^2 \sqrt{4 \frac{m_a^2}{a^2} + 8,75 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}} = P_K \sqrt{4 \frac{m_a^2}{P_K} + 8,75 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (33)$$

Для полюсної мережі з п'ятьма рівними сторонами та полюсом у центрі мережі (рис. 2, б) величина кута згідно з формулою (15) становитиме $\beta = 54^\circ$, а $\text{ctg}54^\circ = 0,7265$, $\text{ctg}(2 \cdot 54^\circ) = -0,3249$. Для цього випадку та для однакових за величиною площ внутрішніх трикутників $S_i = S$, СКП визначення площі відповідно до формули (14) становитиме:

$$m_{P_5} = \sqrt{4P_5^2 \frac{m_b^2}{b^2} + 211,2S^2 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (34)$$

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

З розрахунків числових значень формули (34) встановлено, що внесок корельованих членів у коефіцієнт 211,2 становить всього 18,8. Тоді залишковий коефіцієнт дорівнює 192,4. Відсоток відкинутої частини коефіцієнта відносно збереженої становить $(18,8/192,4) \cdot 100 \% = 9,8 \%$. Зрозуміло, що з урахуванням цієї обставини та наявності першого доданку під знаком радикалу у формулі (34), можна стверджувати, що для $S = P_5/5$

$$m_{P_5} \approx \sqrt{4P_5^2 \frac{m_b^2}{b^2} + 192,4 \cdot S^2 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}} = P_5 \sqrt{4 \frac{m_b^2}{b^2} + 7,696 \frac{m_\beta^2}{\rho^2}}. \quad (35)$$

Для полюсної мережі у вигляді трикутника з рівними сторонами та полюсом у центрі мережі внесок корельованих членів у значення названого коефіцієнта становить 43 %. Отже, збільшення кількості сторін полюсної мережі веде до зменшення відсотка внеску корельованих членів у доданок формули для розрахунку СКП площі, який відповідає за точність вимірювання горизонтальних кутів полюсної мережі. Тому формулу (14) можна подати у скороченому вигляді, що відповідає точності визначення площі полюсної побудови, починаючи з п'ятикутника

$$m_{P_n}^2 \approx 4P_n^2 \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \left[\sum_{i=1}^{2n} \left(\frac{dP_n}{d\beta_i} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Можна показати застосування отриманих формул для визначення СКП площі на прикладі земельної ділянки для ведення особистого селянського господарства площею 2,0 гектара [14]. У випадку, коли ділянка має форму квадрату, то його сторона $a = \sqrt{20000} \approx 141$ м. Якщо для визначення довжини базису застосувати топографічний світловіддалемір СТ-5 «Блеск» і теодоліт ЗТ5КП, то $m_a = 10$ мм + 5 мм $\cdot 0,141 = 10,7$ мм, а $m_\beta = 5''$. За формулою (33) $m_K = 3,4$ м². Згідно з [4] обліковою одиницею площі у селах є 100 м². Тоді, для довірчої ймовірності $P=0,95$ похибка визначення вказаної площі полюсним методом становить $\Delta P = 2m_K = 2 \cdot 3,4 = 6,8$ м, що значно менше наведеної облікової одиниці. Якщо ділянка має форму прямокутника, то для граничного значення $k = \sqrt{3}$, величини базису $b = ka = k \cdot \sqrt{P_n/k} = \sqrt{kP_n} = \sqrt{\sqrt{3} \cdot 20000} = 186,1$ м, $m_b = 10$ мм + 5 мм $\cdot 0,186 = 10,93$ мм і за формулою (32) значення СКП площі ділянки становитиме $m_n = 2,8$ м². Для п'ятикутника з рівними сторонами та полюсом у центрі мережі площа окремого трикутника дорівнює $S = P_5/5$. З іншого боку, площа окремого трикутника полюсної мережі з рівними сторонами b та полюсом у центрі мережі, дорівнює:

$$S = \frac{b}{2} h = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg} \beta, \quad (37)$$

звідки

$$b = 2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\operatorname{tg} \beta}}. \quad (38)$$

Для $n=5$ з (15) $\beta=54^\circ$, а з (38) довжина базису $b = 107,8$ м. Тоді, $m_b = 10$ мм + 5 мм $\cdot 0,108 = 10,54$ мм і для $P = 20000$ м² за формулою (35) $m_{P_5} = 4,1$ м². Для полюсної мережі у формі трикутника з полюсом у центрі мережі: для $n = 3$ з (15)

кут $\beta=30^\circ$; сторона b для $S=P_3/3$ та $P=20000$ м² за формулою (38) $b=214,9$ м²; $m_b=10$ мм + 5 мм $\cdot 0,2149=11,07$ мм; з (16) $m_p=2,7$ м².

Висновки відповідно до статті. Виконано теоретичне обґрунтування точності визначення площ земельних ділянок полюсним методом з урахуванням кореляційної залежності між горизонтальними кутами, виміряними на межових знаках способом кругових прийомів. Загальні формули спрощені для випадків конфігурації меж у вигляді правильного трикутника та п'ятикутника, прямокутника та квадрата. Наведено приклади обчислення точності визначення площ для вказаних фігур.

Список використаних джерел

1. Войтенко С. П. Інженерна геодезія: підручник. Вид. 2-ге виправл. і допов. Київ, 2012. 574 с.
2. Островський А. Л., Мороз О. І., Тартачинська З. Р., Герасимчук І. Ф. Геодезія. Частина перша. Топографія: навч. посіб. Львів: Видавництва Львівської Політехніки, 2011. 440 с.
3. Боровий В. О., Бурачек В. Г., Нисторіак І. О. Ще раз до точності визначення площ земельних ділянок. *Вісник Криворізького національного університету*. 2012. Вип. 33. С. 264-268.
4. Смірнов Є. І. Точність визначення площ земельних ділянок місцевості. *Геодезія, картографія і аерознімання*. 2009. Вип. 72. С. 142-143.
5. Губар Ю. Визначення необхідної точності координат межових знаків для оцінки земель населених пунктів. *Геодезія, картографія і аерознімання*. 2009. Вип. 74. С. 132-135.
6. Определение площадей объектов недвижимости / В. И. Баландин и др.; под ред. В. А. Коугия. Санкт-Петербург, 2013. 112 с.
7. Барановський В. Д., Карпінський Ю. О., Ляшенко А. А. Топографо-геодезичне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Визначення площ територій / за заг. ред. Ю. О. Карпінського. Київ: НДІГК, 2009. 92 с.
8. Романчук С. В., Кирилюк В. П., Шемякін М. В. Геодезія: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2008. 296 с.
9. Крячок С. Д., Мамонтова Л. С., Щербак Ю. В. Визначення площ земельних ділянок довільної форми полюсним методом. *Ресурсозберігаючі технології в проектуванні, землевпорядкуванні та будівництві*: матеріали міжнародної наук.-прак. інтернет-конф., 26–27 березня 2019 р. Кременчук: КрНУ, 2019. С. 94–102.
10. Крячок С. Д., Мамонтова Л. С., Щербак Ю. В. Застосування полюсного методу визначення координат на приаеродромній території. *Технічні науки та технології*. 2018. № 3 (13). С. 258-268.
11. Про затвердження Інструкції з експлуатації аеродромів державної авіації України. Наказ Міністерство оборони України від 01.07.2013: веб-сайт. URL: http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/RE23761.html.
12. Інструкція з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500: ГКНТА – 2.04-02-98: офіц. вид. Київ: Укргеоінфом, 1999. 155 с.
13. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посіб. Київ: КНУБА, 2003. 216 с.
14. Земельний кодекс України / Юрист-UA.Net. URL: https://urist-ua.net/кодекси/земельний_кодекс_України.

References

1. Voytenko, S. P. (2012). *Inzhenerna heodeziia [Engineering Geodesy]*. (2nd ed., corrected and supplemented). Kyiv: KNUBA [in Ukrainian].
2. Ostrovskiy, A. L., Moroz, O. I., Tartachynska, Z. R., Herasymchuk, I. F. (2011). *Heodeziia. Chastyna persha. Topohrafiia [Geodesy. Part One. Topography]*. Lviv: Vydavnytstva Lvivskoi Politekhniky [in Ukrainian].
3. Borovyi, V. O., Burachek, V. H., Nystoriak I. O. (2012). Shche raz do tochnosti vyznachennia plosch zemelnykh dilianok [Once again to the accuracy of determining the area of land]. *Visnyk Kryvorizkoho natsionalnoho universytetu – Bulletin of Kryvyi Rih National University*, 33, 264–268 [in Ukrainian].

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

4. Smirnov, Ye. I. (2009). Tochnist vyznachennia ploshch zemelnykh dilianok mistsevosti. [The accuracy of determining the area of land]. *Heodeziia, kartohrafiia i aeroznimannia – Geodesy, cartography and aerial photography*, 72, 142–143 [in Ukrainian].
5. Hubar, Yu. (2009). Vyznachennia neobkhidnoi tochnosti koordynat mezhovykh znakiv dlia otsinky zemel naselenykh punktiv [Determining the necessary precision coordinates of landmarks for assessment of land settlements]. *Heodeziia, kartohrafiia i aeroznimannia – Geodesy, cartography and aerial photography*, 74, 132–135 [in Ukrainian].
6. Balandin, V. I., Kougiia, V. A. (Ed.), Bryn, M. Ia. (2013). *Opreddenie ploshchadei obektov nedvizhimosti [Determination of the area of real estate]*. St. Petersburg [in Russian].
7. Baranovskiy, V. D., Karpinskiy, Yu. O. (Ed.), Liashenko, A. A. (2009). *Topografo-heodezychne zabezpechennia vedennia derzhavnoho zemelnogo kadastru. Vyznachennia ploshch terytorii [Topographic and geodetic maintenance of state land cadastre. Determination of areas of territories]*. Kyiv: NDIHK [in Ukrainian].
8. Romanchuk, S. V., Kyryliuk, V. P., Shemiakin, M. V. (2008). *Heodeziia [Geodesy]*. Kyiv: Tsentr uchbovoi literatury [in Ukrainian].
9. Shcherbak, Yu. V., Kriachok, S. D., Mamontova, L. S. (2019). Vyznachennia ploshch zemelnykh dilianok dovilnoi formy poliusnym metodom [Determination of areas of arbitrary land plots by pole method]. *Resursozberihaiuchi tekhnologii v proektuvanni, zemlevporiadkuvanni ta budivnytstvi nauk.-prak. Internet Conference – Resource Conservation Technologies in Design, Land Management and Construction: Proceedings of an International Scientific and Practical Internet Conference* (Kremen-chuk, March 26-27, 2019). KrNU [in Ukrainian].
10. Kriachok, S. D., Shcherbak, Yu. V., Mamontova, L. S. (2018). Zastosuvannia poliusnoho metodu vyznachennia koordynat na pry aerodromnii terytorii. Application of the pole method for determining coordinates in the aerodrome territory]. *Tekhnichni nauky ta tekhnologii – Technical sciences and technologies*, 3 (13), 258–268 [in Ukrainian].
11. Pro zatverdzhennia Instruksii z ekspluatatsii aerodromiv derzhavnoi aviatsii Ukrainy [On approval of the Instruction on the operation of state aviation aerodromes of Ukraine.]. (July 1, 2013).
12. Instruksiiia z topografichnoho znimannia u masshtabakh 1:5000, 1:2000, 1:1000 ta 1:500 [Instructions topographic removing the scale of 1: 5000, 1: 2000, 1: 1000 and 1: 500]. HKNTA – 2.04-02-98 (1999).
13. Voytenko, S. P. (2003). *Matematychna obrobka heodezychnykh vymiriv. Teoriya pokhybok vymiriv [Mathematical processing of geodetic measurements. Theory of measurement errors]*. Kyiv: KNUBA [in Ukrainian].
14. Zemelnyi kodeks Ukrainy [Land Code of Ukraine]. № 2768-III (October 25, 2001).

UDC 528.3

Serhiy Kryachok, Lyudmila Mamontova, Yuliya Shcherbak

THEORETICAL RATIONALE OF THE ACCURACY OF DETERMINATION OF LAND PLOTS BY POLAR METHOD

Urgency of the research. Determining the area of territories is one of the main tasks of geodetic support for land management. The reliability of information on resources is directly related to the accuracy of determining the area of land. The need to determine the area arises when solving urban problems, conducting recreational work, vertical planning of construction sites, forecasting areas of flooding and forest fires.

Target setting. There are the following methods for determining the area: graphic, instrumental, analytical. The graphical method involves the use of specially laid out palettes made of transparent material, which are superimposed on the cartographic image of the area. The area is calculated by the number of elementary figures in the form of rectangles with a known area. The instrumental method needs the use of mechanical or electronic planimeters. The area of the plot on its cartographic image is determined after the contour has been circled by a special lever with a mark according to the difference in readings on the planimeters scale. The most accurate is the analytical method. It provides for determining the area of the plot by the coordinates of points located on the contour of the site, using the appropriate mathematical apparatus.

Actual scientific researches and issues analysis. Recent publicly available publications were reviewed on the accuracy of area determination by analytical method.

Unexplored parts of a common problem. Unexplored is the accuracy of determining the area of land plots by the polar method, taking into account the correlation dependencies between adjacent horizontal angles, measured at the boundary mark.

The research objective. The main goal of the article is a theoretical justification for the accuracy of determining the area of land plots by the polar method, taking into account the correlation between adjacent horizontal angles measured at each boundary mark.

The statement of basic materials. The theoretical substantiation of determining the area of land plots by the polar method in the form of polygons is carried out taking into account the measured horizontal angles and the length of the basis

was made. Based on the formulas obtained, partial differential expressions are defined. Taking into account the correlation dependence between horizontal angles, formulas was derived for determining the mean square error of determining the area of land plots with the configuration of the boundaries in the form of a polygon. Simplifications of general formulas for determining the accuracy of areas in the form of a regular triangle and pentagon, rectangle and square are made. Calculations of the accuracy of land areas for these figures using simplified formulas are presented.

Conclusions. The theoretical substantiation of the accuracy of determining the area of land plots by the polar method is carried out, taking into account the correlation between adjacent horizontal angles measured at the boundary marks. The general form of the formulas is simplified for cases of boundary configuration in the form of a regular triangle and pentagon, rectangle and square. Examples of calculating the accuracy of determining the area for these figures are given.

Keywords: polar method; land area; correlation coefficient.

Fig.: 3. **References:** 14.

Крячок Сергій Дмитрович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геодезії, картографії та землеустрою, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14035, Україна).

Kryachok Serhiy – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Geodesy, Cartography and Land Management, Chernihiv National University of Technology (95 Shevchenko Str., 14035 Chernihiv, Ukraine).

E-mail: geodesist2015@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5633-1501>

ResearcherID: N-3061-2016

Мамонтова Людмила Степанівна – старший викладач кафедри геодезії, картографії та землеустрою, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14035, Україна).

Mamontova Lyudmila - Senior Lecturer of the Department of Geodesy, Cartography and Land Management, Chernihiv National University of Technology (95 Shevchenko Str., 14035 Chernihiv, Ukraine).

E-mail: liudmila.mamontova@yandex.ua

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4144-5261>

ResearcherID: N-3070-2016

Щербак Юлія Володимирівна – магістр, викладач кафедри геодезії, картографії та землеустрою, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14035, Україна).

Shcherbak Yuliya – master, lecturer of the Department of Geodesy, Cartography and Land Management, Chernihiv National University of Technology. (95 Shevchenko Str., 14035 Chernihiv, Ukraine).

E-mail: shch.yu15@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3439-3792>

ResearcherID: H-4199-2016