

РОЗДІЛ V. БУДІВНИЦТВО ТА ГЕОДЕЗІЯ

УДК 528.481

DOI: 10.25140/2411-5363-2020-3(21)-293-300

Богдан Джуман, Федір Заблоцький

ЗАСТОСУВАННЯ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ СТНА-ФУНКЦІЯМИ

Актуальність теми дослідження. На сьогодні при побудові висотних мереж найточнішими залишаються традиційні методи геометричного нівелювання. Попри те, що застосування супутникових технологій є значно економічно вигіднішим і дозволяє отримати координати субміліметрового рівня точності, відсутність високоточних моделей геоїда не дозволяє повноцінно замінити ними традиційні методи. Тому дослідження і покращення методів і алгоритмів побудови поверхні геоїда є актуальною задачею.

Постановка проблеми. Є чимало методів побудови поверхні геоїда. Останнім часом дедалі більшу популярність набирають параметричні методи, в основі яких лежить використання сферичних функцій Лежандра дійсного ступеня. До основних недоліків такого роду методів можна віднести те, що вони не є ортогональними у своїй області визначення. Виняток становлять СТНА-функції. Відповідно при їх використанні можна застосувати квадратурні формули (напр., другий метод Неймана). Основна проблема полягає в тому, що такі квадратури мають дуже погану збіжність, і необхідно розробити модифіковані методи, які дозволятимуть обчислювати невідомі коефіцієнти моделі з меншими витратами часу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розглянуто публікації, в яких висвітлено основні етапи побудови потенціальних полів з використанням сферичних функцій дійсного ступеня.

Виділення не досліджених раніше частин загальної проблеми. Використання СТНА-функцій для побудови високоточного регіонального гравітаційного поля є практично надзвичайно складною задачею через повільну збіжність квадратурних рядів.

Постановка завдання. Розробити алгоритми, які дозволять покращити збіжність квадратурних рядів при використанні СТНА-функцій для побудови високоточного регіонального гравітаційного поля.

Виклад основного матеріалу. Розроблено модифікований метод застосування квадратурних формул Гаусса при моделюванні регіонального гравітаційного поля Землі СТНА-функціями. Це дозволить будувати високоточні регіональні поверхні геоїда без надмірного використання ресурсів і часу.

Висновки відповідно до статті. Запропоновано та апробовано методуку для оптимізації обчислення невідомих гармонічних коефіцієнтів моделі регіонального гравітаційного поля з використанням квадратурних формул Гаусса.

Ключові слова: гравітаційне поле; модель; сферичні функції; квадратурні формули.

Табл.: 4. Рис.: 4. Бібл.: 7.

Актуальність теми дослідження. Використання супутникових технологій дозволяє отримувати координати точки із субміліметровим рівнем точності в геодезичній системі координат. Для переходу від геодезичної до ортометричної або нормальної висоти необхідно обчислити в цій точці висоту геоїда або квазігеоїда відповідно. Сучасні моделі висот геоїда за точністю значно поступаються геодезичним висотам. Відповідно актуальним є завдання розроблення нових алгоритмів і методик для моделювання високоточних поверхонь геоїда.

Постановка проблеми. Нині відомо багато методів побудови регіональної моделі геоїда. Основними методами непараметричного моделювання можна вважати метод середньої квадратичної колокації, швидке перетворення Фур'є тощо. Своєю чергою основним методом параметричного моделювання регіонального потенціального (в тому числі гравітаційного) поля є метод SCHА [1], на основі якого побудовано інші методи, такі як ASHA, TOSCA, СТНА [2; 3; 4] тощо. Незважаючи на велику кількість цих методів точність відповідних моделей складає близько 10 см, що є значно більше, ніж точність геодезичної висоти, отриманої з використанням супутникових технологій. Тому для заміни традиційних методів високоточного нівелювання супутниковими методами необхідно покращити алгоритми і методики побудови поверхні геоїда.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз публікацій [2], присвячених використанню методів параметричного моделювання регіональних гравітаційних та магнітних полів, показує, що метод СТНА [4] побудови регіонального гравітаційного поля має

суттєву перевагу над всіма іншими методами, оскільки в його основі лежать функції, ортогональні на довільній сферичній трапеції. Це дає можливість при обчисленні гармонічних коефіцієнтів використовувати квадратурні формули [5; 6]. Проте використання цього методу несе за собою деякі труднощі, які необхідно мінімізувати [7].

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Збіжність квадратурних рядів при використанні методу СТНА для побудови регіональної моделі гравітаційного поля Землі є доволі повільною [7], що спричиняє значні труднощі при використанні цього методу. Тому необхідно виконати модифікацію зазначеного методу, яка дозволить суттєво зменшити час обчислень без втрати точності.

Постановка завдання. Вирішення поставленої задачі реалізується шляхом модифікації другого методу Неймана при його застосуванні до СТНА-функцій під час моделювання регіонального гравітаційного поля Землі.

Виклад основного матеріалу. Наприкінці ХХ століття в роботі [1] було запропоновано використовувати для моделювання регіонального гравітаційного та магнітного полів (як наслідок, і поверхні геоїда як трансформанти гравітаційного поля) сферичні функції Лежандра дійсного ступеня, які вперше були отримані Томпсоном. Такий метод отримав назву SCHA. Функції, покладені в основу цього методу, мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{km}(\theta, \lambda) &= \tilde{P}_{n_k m}(\cos \theta) \cos(m\lambda), \\ \tilde{S}_{km}(\theta, \lambda) &= \tilde{P}_{n_k m}(\cos \theta) \sin(m\lambda),\end{aligned}\quad (1)$$

де $\tilde{P}_{n_k m}(\cos \theta)$ можна знайти, використовуючи розклад у гіпергеометричний ряд F :

$$\tilde{P}_{n_k m}(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos \theta}{2}\right). \quad (2)$$

У формулах (1) і (2); n – дійсний ступінь; m – цілий порядок; k – упорядкувальний індекс.

Областю визначення функцій 1 слугує сферичний сегмент, а величина ступеня n залежить від величини цього сегмента. Для візуалізації на рис. 1 зображено сферичні функції $\tilde{P}_{22.821_0}(\cos \theta)$ ($k = 6$), $\tilde{P}_{17.072_6}(\cos \theta) \cos 6\lambda$ ($k = 6$) та $\tilde{P}_{42.360_6}(\cos \theta) \cos 6\lambda$ ($k = 12$) на сегменті сфери $\theta_0 \leq 25^\circ$.

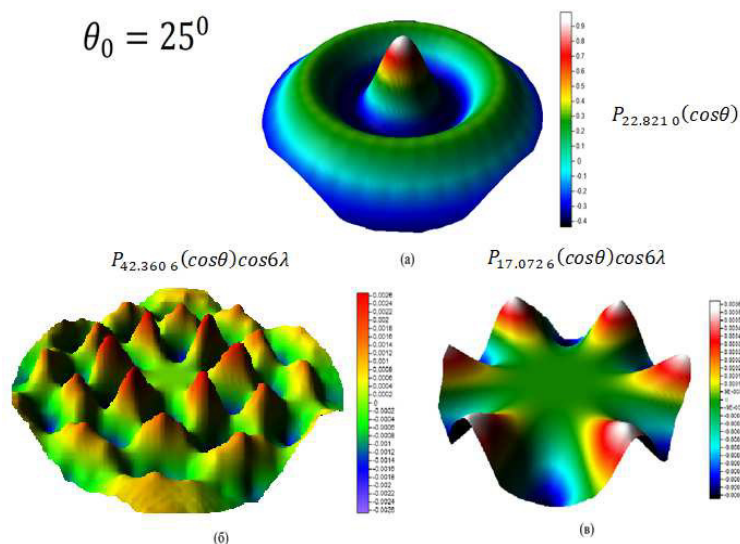


Рис. 1. Сферичні функції Лежандра на сферичному сегменті $\theta_0 \leq 25^\circ$:
 а – $\tilde{P}_{22.821_0}(\cos \theta)$, ($k = 6$); б – $\tilde{P}_{42.360_6}(\cos \theta) \cos 6\lambda$ ($k = 12$); в – $\tilde{P}_{17.072_6}(\cos \theta) \cos 6\lambda$ ($k = 6$)

Незважаючи на широке використання методу SCHA [3], він має певні недоліки. Основними недоліками, на нашу думку, є те, що базові функції не є ортогональними і для використання цього методу потрібно вхідні дані трансформувати на сегмент сфери.

Для усунення даних недоліків у роботі [4] було запропоновано метод СТНА, який побудовано на основі методу SCHA. СТНА-функції володіють властивістю ортогональності на довільній сферичній трапеції. Загальний вигляд СТНА-функцій є наступним:

$$\begin{aligned} R_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\theta) \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right), \\ S_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\theta) \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

де $P_{km}(\cos \theta)$ можна знайти як [4]

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta - \theta_{\min}) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{\min})}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{mean} \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_{\max} - \theta) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{\max} - \theta)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

або

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{mean} \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

де $\theta_{\min}, \theta_{\max}, \lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ – координати вершин досліджуваної трапеції, $\theta_{mean} = \frac{\theta_{\min} + \theta_{\max}}{2}$, $\theta_0 = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{2}$.

Для візуалізації на рис. 2 зображено сферичні функції $R_{60}(\theta, \lambda)$, $R_{66}(\theta, \lambda)$ та $R_{63}(\theta, \lambda)$ на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{\min} = 20^\circ, \theta_{\max} = 70^\circ, \lambda_{\min} = 30^\circ, \lambda_{\max} = 50^\circ$.

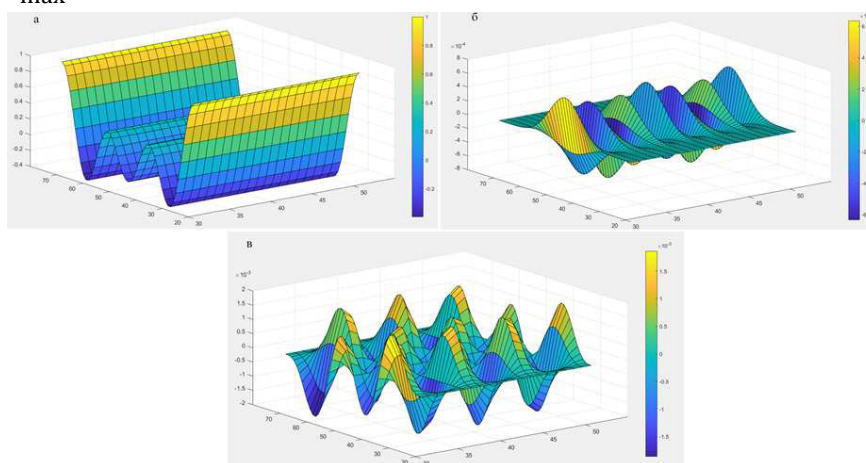


Рис. 2. Сферичні функції на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{\min} = 20^\circ, \theta_{\max} = 70^\circ, \lambda_{\min} = 30^\circ, \lambda_{\max} = 50^\circ$:
а – $R_{60}(\theta, \lambda)$; б – $R_{66}(\theta, \lambda)$; в – $R_{63}(\theta, \lambda)$

Оскільки функції 3 володіють властивістю ортогональності, для обчислення невідомих коефіцієнтів моделі регіонального гравітаційного поля Землі можна використати квадратурні формули. У роботі [7] було проведено аналіз можливості застосування другого методу Неймана (квадратурних формул Гаусса) до СТНА-функцій. Встановлено, що

ряд числового інтегрування збігається дуже повільно, і навіть для побудови моделей низького порядку необхідно використовувати порівняно велику сітку з вхідними даними. Виконаємо модифікацію цього методу. Для цього спершу введемо нову змінну t , область визначення якої $t \in [2\cos\theta_0 - 1; 1]$:

$$\begin{aligned} t &= \cos(\theta - \theta_{\min}), \text{ якщо } \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\text{mean}}; \\ t &= 2\cos\theta_0 - \cos(\theta_{\max} - \theta), \text{ якщо } \theta_{\text{mean}} \leq \theta \leq \theta_{\max}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді функції 5 переписуться:

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(t) &= (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1-t}{2}\right), \\ &\text{якщо } \cos\theta_0 \leq t \leq 1, \\ P_{km}(t) &= (-1)^{k+m} (1 - \tilde{t}^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1-\tilde{t}}{2}\right), \\ &\text{якщо } 2\cos\theta_0 - 1 \leq t \leq \cos\theta_0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $\tilde{t} = 2\cos\theta_0 - t$.

Оскільки функції (7) є ортогональними на сферичній трапеції, для обчислення моделі регіонального гравітаційного поля Землі з використанням квадратурних формул необхідно знайти такі вузли θ_i і ваги ω_i , з якими виконуватиметься умова:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i P_{k_1 m}(\theta_i) P_{k_2 m}(\theta_i) = \min, k_1 \neq k_2. \quad (8)$$

Для модифікації методики, запропонованої в [7], знайдемо координати вузлів і ваги на відрізку $[\theta_{\min}, \theta_{\text{mean}}]$, а потім продовжимо їх симетрично відносно θ_{mean} :

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{2}(1 + \cos\theta_0) + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_0)x_i, \\ \omega_i &= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_0)c_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Значення координат вузлів t_i та ваги ω_i до 5-го порядку на відрізку $t \in [0,9063; 1]$ показано в табл. 1.

Таблиця 1

Координати вузлів t_i та ваги ω_i до 5-го порядку на відрізку $t \in [0,9063; 1]$

t	ω
0,910703	0,011099
0,927929	0,022422
0,953154	0,026650
0,978379	0,022422
0,995605	0,011099

З використанням формули 9 можна обчислити координати вузлів сітки θ_i до 5-го порядку на відрізку $\theta \in [20^0, 45^0]$. Ці координати та ваги показано в табл. 2.

Таблиця 2

Координати вузлів θ_i та ваги ω_i до 5-го порядку на відрізку $\theta \in [20^0, 45^0]$

θ	ω
44,39733	0,011099
41,88579	0,022422
37,60697	0,026650
31,93604	0,022422
25,37380	0,011099

Остаточного обчислено координати вузлів і ваги для відрізку $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, розмістивши їх симетрично відносно θ_{mean} . Їх значення показано в табл. 3.

Таблиця 3

Координати вузлів θ_i та ваги ω_i до 5-го порядку на відрізку $\theta \in [20^0, 70]$

θ	ω
25,37380	0,011099
31,93604	0,022422
37,60697	0,026650
41,88579	0,022422
44,39733	0,011099
45,60267	0,011099
48,11421	0,022422
52,39303	0,026650
58,06396	0,022422
64,62620	0,011099

На рис. 3 відображено діаграму обчислених ваг ω_i .

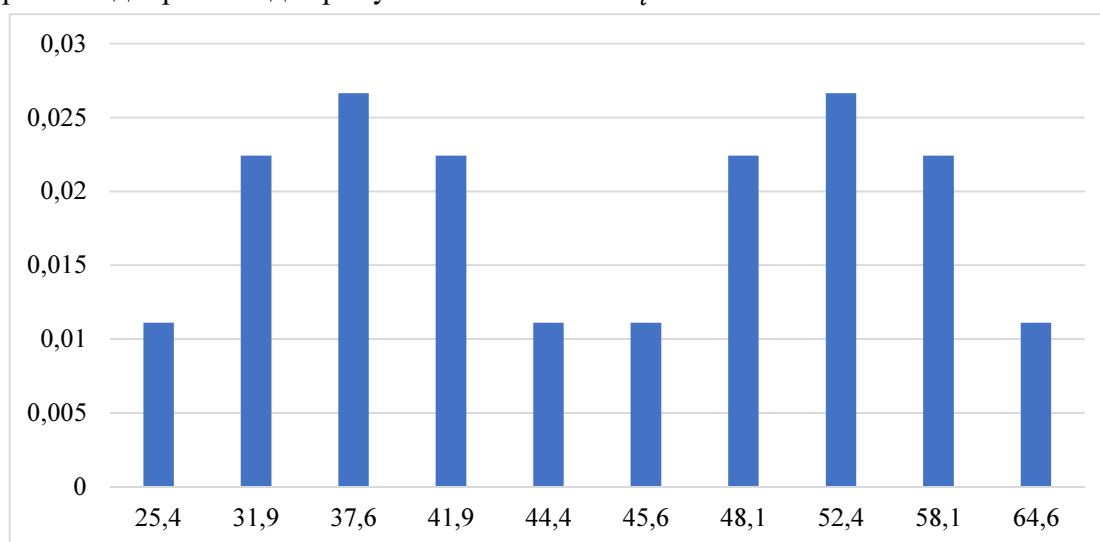


Рис. 3. Ваги ω_i для $N = 5$ на відрізку $\theta \in [20^0, 70^0]$, обчислені за допомогою модифікованого методу

У табл. 4 відображено значення суми 8 до 4 ступеня/порядку для $k_1 + k_2 =$ парне число, а також $k_1 = k_2$, обчисленої у вузлах квадратури Гаусса модифікованим методом при $N = 10$.

Таблиця 4

Суми 8 для $k_1 + k_2 =$ парне число та $k_1 = k_2$ до 4 ступеня/порядку, обчисленої у вузлах квадратури Гаусса модифікованим методом при $N = 10$ на відрізку $\theta \in [20^0, 70^0]$

$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{20}(\theta_i) P_{00}(\theta_i)$	1,2236e-011	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{21}(\theta_i) P_{21}(\theta_i)$	0,0016
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{30}(\theta_i) P_{10}(\theta_i)$	-4,4235e-017	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{22}(\theta_i) P_{22}(\theta_i)$	6,7561e-004
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{31}(\theta_i) P_{11}(\theta_i)$	6,3988e-012	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{30}(\theta_i) P_{30}(\theta_i)$	0,0220
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{40}(\theta_i) P_{00}(\theta_i)$	-3,0026e-010	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{31}(\theta_i) P_{31}(\theta_i)$	5,8826e-004

Закінчення табл. 4

$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{40}(\theta_i) P_{20}(\theta_i)$	-2,8585e-007	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{32}(\theta_i) P_{32}(\theta_i)$	7,3237e-005
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{41}(\theta_i) P_{21}(\theta_i)$	7,1005e-009	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{33}(\theta_i) P_{33}(\theta_i)$	5,0132e-005
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{42}(\theta_i) P_{22}(\theta_i)$	-1,3934e-010	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{40}(\theta_i) P_{40}(\theta_i)$	0,0171
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{00}(\theta_i) P_{00}(\theta_i)$	0,1874	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{41}(\theta_i) P_{41}(\theta_i)$	2,6565e-004
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{10}(\theta_i) P_{10}(\theta_i)$	0,0513	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{42}(\theta_i) P_{42}(\theta_i)$	1,9488e-005
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{11}(\theta_i) P_{11}(\theta_i)$	0,0101	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{43}(\theta_i) P_{43}(\theta_i)$	3,9912e-006
$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{20}(\theta_i) P_{20}(\theta_i)$	0,0309	$\sum_{i=1}^{10} \omega_i P_{44}(\theta_i) P_{44}(\theta_i)$	3,9390e-006

Як можна бачити із табл. 4, значення сум при $k_1 + k_2 =$ парне число, є набагато меншими, аніж при $k_1 = k_2$, і ними можна знехтувати. Збіжність рядів чисельного інтегрування значно краща в модифікованому методі.

Для прикладу обчислимо елементи матриці нормальних рівнянь N , обчисленої з використанням вищеописаної методики на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{\min} = 20^\circ, \theta_{\max} = 70^\circ, \lambda_{\min} = 30^\circ, \lambda_{\max} = 50^\circ$ до 4-го ступеня/порядку ($k_{\max} = 4$), використавши рівномірну сітку з параметрами $N = M = 10$. На рис. 4 зображено фрагмент цієї матриці (6 останніх рядків і стовпців).

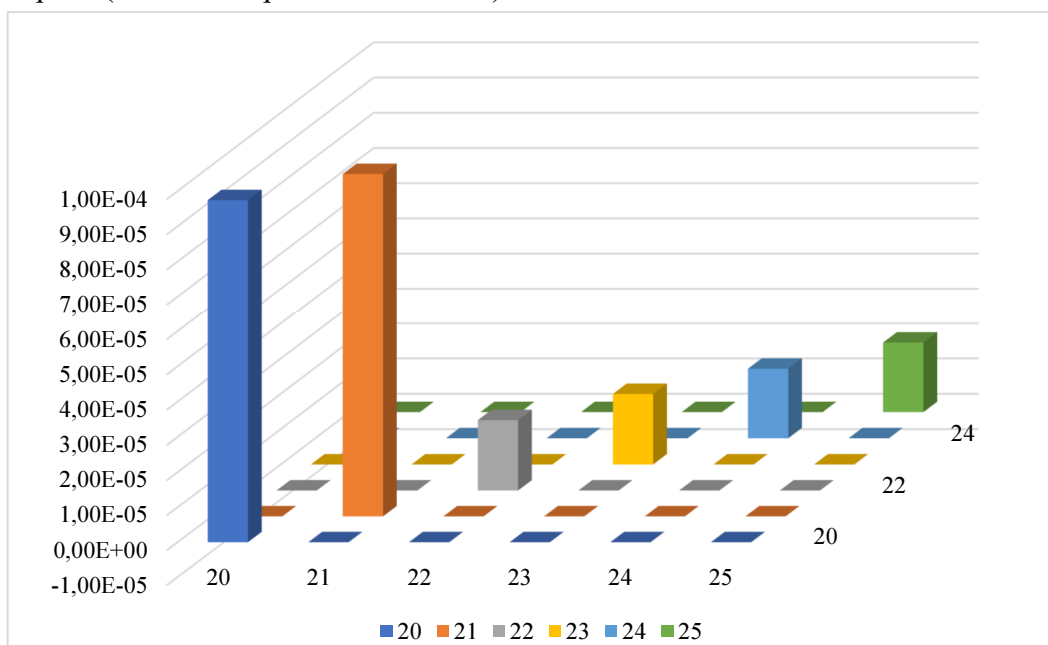


Рис. 4. Фрагмент матриці нормальних рівнянь на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{\min} = 20^\circ, \theta_{\max} = 70^\circ, \lambda_{\min} = 30^\circ, \lambda_{\max} = 50^\circ$ до 4-го ступеня/порядку ($k_{\max} = 4$) з використанням рівномірної сітки з параметрами $N = M = 10$

Очевидно, можна знехтувати всіма елементами матриці нормальних рівнянь за винятком елементів головної діагоналі. Для сітки з координатами вузлів θ_i ($i = \overline{1, \dots, N}$), λ_j ($j = \overline{1, \dots, M}$) будь-який елемент головної діагоналі матриці нормальних рівнянь можна знайти за формулою

$$n_{qq} = \frac{M}{2 - \delta_m} \sum_{i=1}^N \omega_i P_{km}^2(\theta_i), \quad (10)$$

де n_{qq} – елемент головної діагоналі матриці нормальних рівнянь, а δ_m – символ Кронекера:

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 0, \\ 0, & \text{якщо } m \neq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Висновки відповідно до статті. Проаналізовано основні недоліки параметричних методів моделювання регіонального гравітаційного поля. Запропоновано методу для оптимізації обчислення невідомих гармонічних коефіцієнтів моделі регіонального гравітаційного поля з використанням квадратурних формул Гаусса. Для апробації цієї методу обчислено матрицю нормальних рівнянь на сферичній трапеції $\theta_{\min} = 20^\circ$, $\theta_{\max} = 70^\circ$, $\lambda_{\min} = 30^\circ$, $\lambda_{\max} = 50^\circ$.

Список використаних джерел

1. Haines G. V. Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.* 1985. № 90. P. 2583–2591.
2. Джуман Б. Б. Про побудову моделі локального гравітаційного поля. *Геодинаміка*. 2013. № 1(14). С. 29–33.
3. De Santis A. Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.* 1992. № 19. P. 1065–1067.
4. Dzhuman B. B. Modeling of the gravitational field on spherical trapezium. *Geodesy, cartography and aerial photography*. 2018. Vol. 86. P. 5–10.
5. Марченко О. М., Джуман Б. Б. Побудова матриці нормальних рівнянь для моделювання локального гравітаційного поля. *Геодезія, картографія та аерознімання*. 2014. № 79. С. 29–34.
6. Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophys. J. Int.* 1994. № 118. P. 707–716.
7. Джуман Б. Б. Застосування другого методу Неймана до сферичних функцій на сферичній трапеції. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*. 2018. № II(36). С. 21–24.

References

1. Haines, G. V. (1985). Spherical cap harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 90, pp. 2583-2591.
2. Dzhuman, B. (2013). Pro pobudovu modeli lokalnoho hravitatsiinoho polia [On the construction of local gravitational field model]. *Heodynamika – Geodynamics*, 1(14), pp. 29-33.
3. De Santis, A. (1992). Conventional spherical harmonic analysis for regional modeling of the geomagnetic field. *Geophys. Res. Lett.*, 19, pp. 1065-1067.
4. Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the gravitational field on spherical trapezium. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 86, pp. 5-10.
5. Marchenko, O., Dzhuman, B. (2014). Pobudova matrytsi normalnykh rivnian dlia modeliuvannia lokalnoho hravitatsiinoho polia [Construction of the normal equations matrix for modeling of local gravitational field]. *Heodeziia, kartohrafiia ta aereznimannia – Geodesy cartography and aerial photography*, 79, pp. 29-34.
6. Sneeuw, N. (1994). Global spherical harmonic analysis by least squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophys. J. Int.*, 118, pp. 707–716.
7. Dzhuman, B. (2018). Zastosuvannia druhoho metodu Neimana do sferychnykh funktsii na sferychnii trapetsii [Application of the second Neumann's method to spherical functions on a spherical trapezium]. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva – Modern achievements of geodetic science and production*, II(36), pp. 21-24.

UDC 528.481

*Bohdan Dzhuman, Fedir Zablotskyi***APPLICATION OF QUADRATURE FORMULAS IN MODELLING
OF THE GRAVITY FIELD BY ASHA-FUNCTIONS**

Urgency of the research. For today for constructing altitude networks the most accurate are the traditional methods of geometric leveling. Despite the fact that the use of satellite technologies is much more cost-effective and allows to obtain coordinates of the submillimeter level of accuracy, the lack of high-precision models of geoid/quasigeoid does not allow to fully replace traditional methods. Therefore, the study and improvement of methods and algorithms for constructing the surface of the geoid/quasi-geoid is an urgent task.

Target setting. There are many methods of constructing the surface of the geoid. Recently, parametric methods are gaining more and more popularity, which are based on the use of spherical Legendre functions of real degree. The main disadvantages of this method include the fact that they are not orthogonal in their field of definition. Exceptions are STHA-functions. Accordingly, we can use quadrature formulas with them (eg, Neumann's second method). The main problem is that such quadratures have very poor convergence and it is necessary to develop modified methods that will allow to calculate the unknown coefficients of the model with less time.

Actual scientific researches and issues analysis. The publications are considered in which the main stages of construction of potential fields with use of spherical functions of real degree are covered.

Uninvestigated parts of general matters defining. Using STHA-functions to construct a high-precision regional gravitational field is almost an extremely difficult task due to the slow convergence of quadrature series.

The research objective. Develop algorithms that will improve the convergence of quadrature series when using STHA-functions to construct a high-precision regional gravitational field.

The statement of basic materials. A modified method of applying Gaussian quadrature formulas in modeling of the Earth's regional gravitational field with STHA-functions has been developed. This will allow to build high-precision regional surfaces of the geoid/quasigeoid without excessive use of resources and time.

Conclusions. A method for optimizing the calculation of unknown harmonic coefficients of the regional gravitational field model using Gaussian quadrature formulas is proposed and tested.

Keywords: gravitational field; model; spherical functions; quadrature formulas.

Table: 4. Fig.: 4. References: 7.

Джуман Богдан Богданович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка» (вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна).

Dzhuman Bohdan – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Geodesy and Astronomy, Lviv Polytechnic National University (12 S. Bandery Str., 79000 Lviv, Ukraine).
E-mail: teojuman@gmail.com

Заблоцький Федір Дмитрович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка» (вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна).

Zablotskyi Fedir – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Higher Geodesy and Astronomy, Lviv Polytechnic National University (12 S. Bandery Str., 79000 Lviv, Ukraine).
E-mail: fzablots@gmail.com