

УДК 528.481

DOI: 10.25140/2411-5363-2021-1(23)-225-231

Богдан Джуман, Ярина Непеляк

**ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ АКФ СТНА-ПОЛІНОМАМИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РЕГІОНАЛЬНОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ**

На сьогодні метод середньої квадратичної колокації вважається одним із найкращих методів для побудови високоточної регіональної моделі геоїда. Основною складністю цього методу є підбір виразу локальної аналітичної коваріаційної функції відтворювального ядра. У цій статті пропонується обчислення цієї функції з використанням розкладу в ряд за СТНА-поліномами. Здійснено апробацію запропонованого підходу та його порівняння із класичним підходом – розкладом у ряд за поліномами Лежандра. В обох випадках коефіцієнти розкладу знайдено за моделлю Чернінга-Раппа. Обґрунтовано перевагу запропонованого методу перед існуючими.

**Ключові слова:** АКФ; регіональне гравітаційне поле; СТНА-поліноми; система висот.

**Рис.:** 6. **Бібл.:** 9.

**Актуальність теми дослідження.** Діюча нині в Україні Балтійська система висот є морально застарілою і потребує модернізації. У чинній Постанові Кабінету Міністрів України «Деякі питання застосування системи висот UELN/EVRS2000 (Об'єднана європейська нівелірна мережа/Європейська вертикальна референсна система 2000 року)» зазначено, що «виконання топографо-геодезичних та картографічних робіт починаючи з 1 січня 2023 р. здійснюватиметься із застосуванням системи висот UELN/EVRS2000 (Об'єднаної європейської нівелірної мережі/Європейської вертикальної референсної системи 2000 року)». Для успішної інтеграції нашої системи висот в європейську необхідно побудувати високоточну модель поверхні геоїда на територію України, яка має добре узгоджуватися з моделлю Європейського геоїда EGG2015. Це дозволить використовувати прогресивні супутникові технології для визначення гравітаційнозалежних висот.

**Постановка проблеми.** До основних методів побудови глобального гравітаційного поля Землі відносять метод розкладу геопотенціалу в ряд за сферичними функціями Лежандра [2] та метод середньої квадратичної колокації (СКК) [5]. Незважаючи на різну природу цих методів, вони мають тісний взаємозв'язок. З теорії сучасної фізичної геодезії добре відомо, що існує простий аналітичний зв'язок між коефіцієнтами розкладу аналітичної коваріаційної функції (АКФ) в ряд за поліномами Лежандра та коефіцієнтами розкладу в ряд гравітаційного потенціалу за сферичними функціями Лежандра. Своєю чергою, до основних методів побудови регіонального гравітаційного поля Землі належить метод розкладу геопотенціалу в ряд за сферичними функціями з дробовими індексами (зокрема, СТНА-метод [3]) та метод СКК. Проте на сьогодні не встановлено взаємозв'язків між ними. Побудова АКФ за допомогою СТНА-поліномів, довжина хвилі яких значно менша порівняно з поліномами Лежандра і залежить від площі досліджуваного регіону, дозволить значно покращити точність регіональних моделей гравітаційного поля Землі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз публікацій [4; 5; 6], присвячених знаходженню аналітичного виразу АКФ, показує, що оптимальним шляхом є її розклад у ряд за поліномами Лежандра, які мають гармонічне продовження в просторову область. Крім цього, знаходження коефіцієнтів такого розкладу можливе із використанням моделі Чернінга-Раппа [9], яка себе добре зарекомендувала і нині використовується для побудови моделі геоїда в багатьох країнах світу [1; 7; 8]. Основним недоліком цього підходу є те, що область визначення поліномів Лежандра не збігається з областю визначення вхідних даних (трансформант геопотенціалу) для побудови регіонального гравітаційного поля.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Дуже перспективним може бути підхід до побудови АКФ з використанням СТНА-поліномів саме через те, що довжина хвилі даних функцій збігається з площею досліджуваного регіону, а всі інші властивості збігаються із властивостями поліномів Лежандра. Саме тому необхідно здійснити обчислення АКФ із використанням поліномів Лежандра та СТНА-поліномів та виконати аналіз отриманих результатів.

**Мета дослідження.** Дослідити можливість використання СТНА-поліномів для побудови коваріаційних та кросковаріаційних функцій трансформант геопотенціалу за моделлю Чернінга-Раппа.

**Виклад основного матеріалу.** Для побудови моделі гравітаційного поля Землі методом СКК необхідно побудувати коваріаційні та кросковаріаційні функції. Зазвичай за функцію відтворювального ядра приймають коваріаційну функцію збурювального потенціалу  $K(P, Q)$  [5]:

$$K(P, Q) = \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} k_n \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi), \quad (1)$$

де  $R$  – середній радіус Землі,  $\psi$  – сферична відстань між біжучими точками  $P$  та  $Q$ ,  $r$  та  $r'$  – сферичні координати точок  $P$  та  $Q$  відповідно,  $P_n$  – поліноми Лежандра,  $\tilde{k}_n$  – коефіцієнти розкладу. Це досить зручно, адже практично всі трансформанти гравітаційного потенціалу можна представити через функцію збурювального потенціалу з використанням лінійних функціоналів [6]:

$$\begin{aligned} N &= \frac{T}{\gamma}, & \Delta g &= - \left[ \frac{\partial T}{\partial r} \right]_{Q_0} - \frac{2T_{Q_0}}{r_{Q_0}}, \\ \xi &= - \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \\ \eta &= - \frac{1}{\gamma r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $T$  – збурювальний потенціал,  $N$  – висота поверхні геоїда над нормальним еліпсоїдом,  $\gamma$  – нормальне значення прискорення сили тяжіння,  $Q_0$  – точка на телуроїді,  $\xi$  і  $\eta$  – відхилення прямовисних ліній у площині меридіанного еліпса і першого вертикалу.

У такому випадку довільна коваріаційна функція  $C$  може бути представлена як [6]

$$C_{ij}(P, Q) = L_i^P L_j^Q K(P, Q), \quad (3)$$

де  $L_i^P$  –  $i$ -ий лінійний функціонал у точці  $P$ ,  $L_j^Q$  –  $j$ -ий лінійний функціонал у точці  $Q$ . Застосовуючи формули (1), (2) та (3) не важко показати, що між коефіцієнтами коваріаційних функцій висот геоїда  $\tilde{k}_n$  та збурювального потенціалу  $k_n$  має місце залежність:

$$k_n = \gamma^2 \tilde{k}_n. \quad (4)$$

Не важко знайти вирази для коваріаційних функцій

$$\begin{aligned} \tilde{C}(P, Q) &= \text{cov}[T(P), \Delta g(Q)], \\ C(P, Q) &= \text{cov}[\Delta g(P), \Delta g(Q)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Використавши формули (1), (2) та (3), отримаємо

$$\begin{aligned} \tilde{C}(P, Q) &= \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} \frac{n-1}{r'} k_n \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi), \\ C(P, Q) &= \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{rr'} k_n \left( \frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \end{aligned} \quad (6)$$

Для визначення коефіцієнтів  $k_n$  можна використати добре відому модель Чернінга-Раппа [9]:

$$k_n = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+B)} s^{n+2}. \quad (7)$$

а  $s$  задається формулою

$$s = \frac{R_B^2}{R^2}, \quad (8)$$

де  $R_B$  – сфера Б'єрхаммара.

У моделі Чернінга-Раппа невідомими слугують чотири параметри:  $N_{max}$ ,  $A$ ,  $B$  та  $s$ . Їх визначають методом підбору на основі емпіричної коваріаційної функції (ЕКФ).

Спробуємо розкласти коваріаційні функції в ряд за СТНА-поліномами. Нагадаємо, що загальний вигляд СТНА-поліномів наступний [3]:

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{mean} \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{max} \end{aligned} \right\}, (9)$$

де  $\theta_{min}, \theta_{max}, \lambda_{min}, \lambda_{max}$  – координати вершин досліджуваної трапеції,  $\theta_{mean} = \frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2}$ ,  $\theta_0 = \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2}$ .

Для розкладу розглянутих вище коваріаційних функцій у ряд за СТНА-поліномами (9) спершу задамо жорстку умову  $\theta_{min} = 0$ . У такому випадку функцію відтворювального ядра (коваріаційну функцію збурювального потенціалу)  $K(P, Q)$  запишемо як

$$K(P, Q) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi). \quad (10)$$

Коефіцієнти розкладу в ряд коваріаційної функції висот геоїда  $\tilde{k}_l$  можна знайти за формулою (4). Формули (6) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(P, Q) &= \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} \frac{n_l-1}{r'} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi), \\ C(P, Q) &= \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} \frac{(n_l-1)^2}{rr'} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi). \end{aligned} \quad (11)$$

Обчислення коефіцієнтів коваріаційної функції збурювального потенціалу також можливе з використанням моделі Чернінга-Раппа в такій редакції:

$$k_l = \frac{A}{(n_l-1)(n_l-2)(n_l+B)} s^{n_l+2}. \quad (12)$$

Для апробації запропонованого алгоритму знайдено коваріаційні функції  $cov[T(P), T(Q)], cov[N(P), N(Q)], cov[T(P), \Delta g(Q)]$  та  $cov[\Delta g(P), \Delta g(Q)]$  за моделлю Чернінга-Раппа з використанням поліномів Лежандра та СТНА-поліномів за ЕКФ, побудованою на основі 213 значень висот геоїда, отриманих із GNSS-спостережень на пунктах ДГМ I, II та III класів на території Львівської області (рис. 1).

Для обчислення ЕКФ за вимірами  $l(\theta, \lambda)$  на обмеженій території, пари вимірів  $l_i$  та  $l_j$  формують у класи  $p$ , що залежать від сферичної відстані [4]:

$$\psi_{p-1} < \psi_{ij} < \psi_p. \quad (13)$$

Тоді ЕКФ можна записати у вигляді:

$$ЕКФ(p) = \frac{1}{N_p} \sum_{ij}^{N_p} l_i l_j. \quad (14)$$

У випадку поліномів Лежандра розклад в ряд відбувався від 361 до 600 порядку, в той час як у випадку СТНА-поліномів – від 3 до 8 порядку. Параметри при використанні поліномів Лежандра:  $A = 50001,2; B=24; s = 0,9997$ , а параметри при використанні СТНА-поліномів:  $A = 129855,6; B=24; s = 0,9997$ . На рис. 2 зображено ЕКФ та АКФ, побудовані з використанням поліномів Лежандра, а на рис. 3-6 відображено отримані коваріаційні функції.

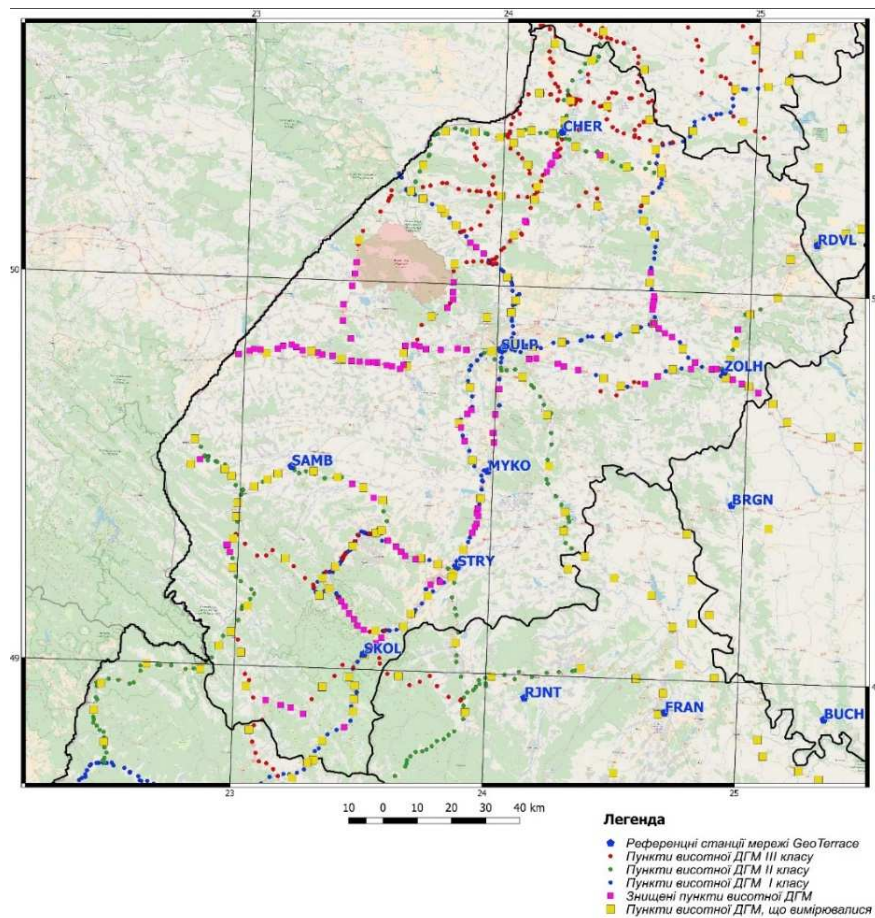


Рис. 1. Спостережувані пункти висотної ДГМ та референцні станції мережі GeoTerrace на території Львівської області

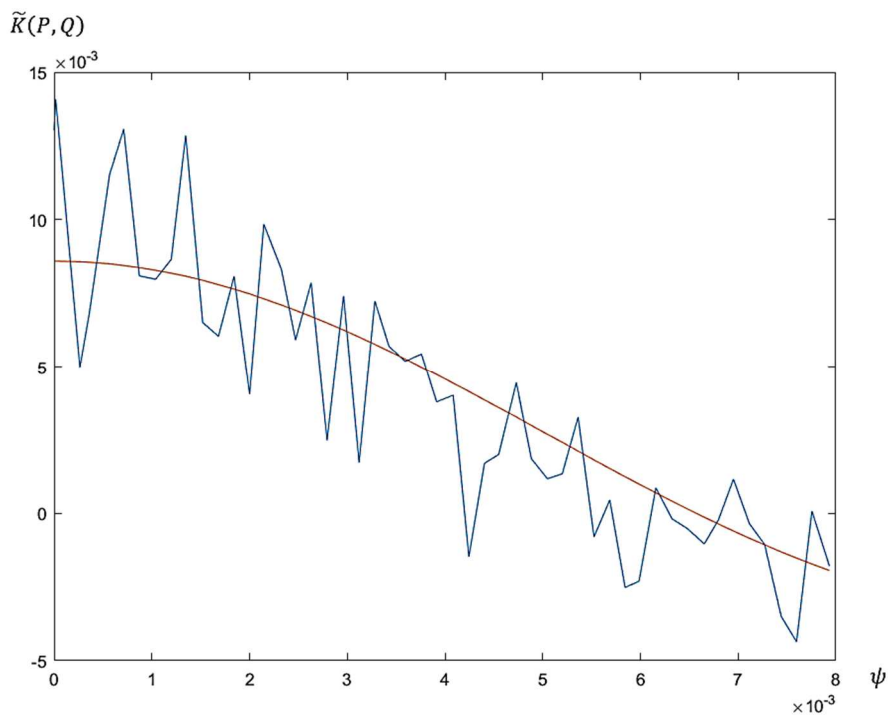


Рис. 2. ЕКФ (синя крива) та АКФ (червона крива)

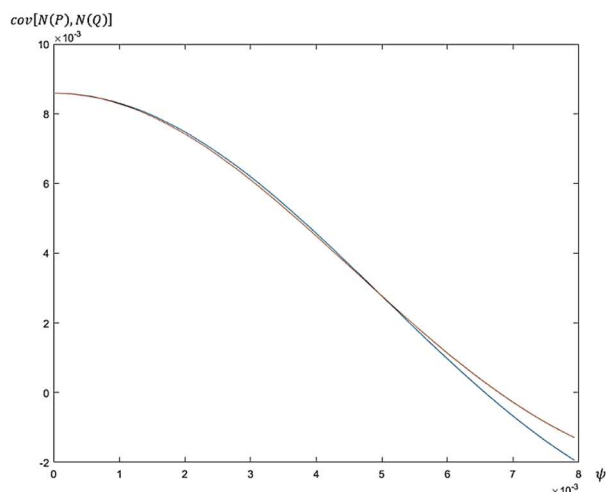


Рис. 3. Коваріаційна функція  $cov[N(P), N(Q)]$ , розкладена в ряд за поліномами Лежандра (синя крива) та СТНА-поліномами (червона крива)

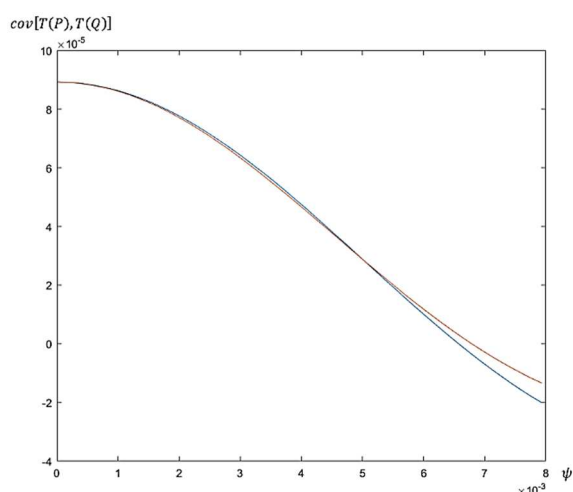


Рис. 4. Коваріаційна функція  $cov[T(P), T(Q)]$ , розкладена в ряд за поліномами Лежандра (синя крива) та СТНА-поліномами (червона крива)

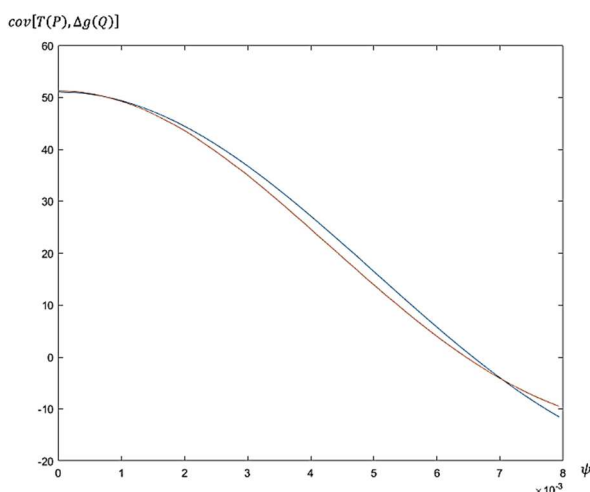


Рис. 5. Коваріаційна функція  $cov[T(P), \Delta g(Q)]$ , розкладена в ряд за поліномами Лежандра (синя крива) та СТНА-поліномами (червона крива)

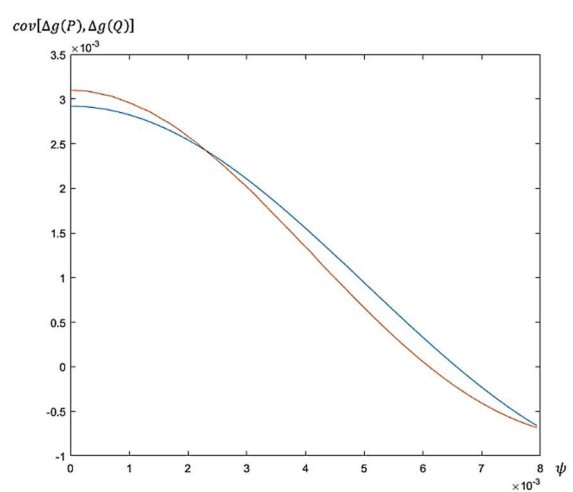


Рис. 6. Коваріаційна функція  $cov[\Delta g(P), \Delta g(Q)]$ , розкладена в ряд за поліномами Лежандра (синя крива) та СТНА-поліномами (червона крива)

**Висновки.** Проаналізовано особливості побудови регіонального гравітаційного поля Землі методом СКК. Запропоновано під час представлення АКФ використовувати замість поліномів Лежандра СТНА-поліноми. Для апробації даної методики обчислено коваріаційні та кросковаріаційні функції на основі ЕКФ, побудованої за значеннями висот геоїда, отриманих із GNSS-спостережень на пунктах ДГМ I, II та III класів на території Львівської області. Встановлено, що в цьому випадку СТНА-поліноми є значно ефективнішими за поліноми Лежандра, оскільки їх область визначення збігається з областю досліджуваного регіону. Для прикладу показано, що для Львівської області розклад коваріаційних функцій у ряд за поліномами Лежандра до 600 порядку є еквівалентний розкладу в ряд за СТНА-поліномами до 8-го порядку.

**Список використаних джерел**

1. Agren J., Kempe C., Jivall L. (2018). Noggrann hojdbestamning med den nya nationella geoidmodellen SWEN17\_RH2000 (in Swedish). Presented at the conference Kartdagarna, 20-22 March 2018, Linkoping, Sweden.
2. Barthelmes, F. & Köhler, W., 2016: International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Drewes, H., Kuglitsch, F., Adám, J. et al., *The Geodesists Handbook 2016, Journal of Geodesy*. 2016. Vol. 90(10). Pp. 907-1205. DOI: 10.1007/s00190-016-0948z
3. Dzhuman B.B. Modeling of the Earth gravitational field using spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*. 2018. Vol. 86. Pp. 5-10.
4. Knudsen P. Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. *Bulletin géodésique*. 1987. Vol. 61(2). Pp. 145–160. doi:10.1007/BF02521264.
5. Moritz H. Integral formulas and Collocation. *Man. Geod.* 1, 1976. Pp. 1-40.
6. Moritz H. (1980) *Advanced physical geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
7. Pail R., Kühtreiber N., Wiesenhofer B., Hofmann-Wellenhof B., Ullrich C., Höggerl N., Ruess D., Imrek E. The official Austrian geoid solution 2008: Data, Method and Results. Poster presented at the EGU General Assembly, Vienna, 2009.
8. Schwabe J., Liebsch G., Schirmer U. (2016). Refined computation strategies for the new German Combined Quasigeoid GCG2016. Symposium on Geoid. *Gravity and Height Systems (GGHS2016)*. 19-23 September 2016, Thessaloniki, Greece.
9. Tscherning C. C., Rapp R. H. (1974). Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. Report Department of Geodetic Science, no. 208, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.

**References**

1. Agren, J., Kempe, C., Jivall, L. (2018). Noggrann hojdbestamning med den nya nationella geoidmodellen SWEN17\_RH2000 (in Swedish). *Presented at the conference Kartdagarna, 20-22 March 2018, Linkoping, Sweden*.
2. Barthelmes, F. & Köhler, W. (2016). International Centre for Global Earth Models (ICGEM), in: Drewes, H., Kuglitsch, F., Adám, J. et al., *The Geodesists Handbook 2016, Journal of Geodesy* (2016), 90(10), pp 907-1205, doi: 10.1007/s00190-016-0948z.
3. Dzhuman, B. B. (2018). Modeling of the Earth gravitational field using spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 86, pp. 5-10.
4. Knudsen, P. (1987). Estimation and modelling of the local empirical covariance function using gravity and satellite altimeter data. *Bulletin géodésique*, 61(2), pp. 145–160. doi:10.1007/BF02521264.
5. Moritz, H. (1976). Integral formulas and Collocation. *Man. Geod.* 1, pp. 1-40.
6. Moritz, H. (1980) *Advanced physical geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
7. Pail, R., Kühtreiber, N., Wiesenhofer, B., Hofmann-Wellenhof, B., Ullrich, C., Höggerl, N., Ruess, D., Imrek, E. (2009). The official Austrian geoid solution 2008: Data, Method and Results. Poster presented at the EGU General Assembly, Vienna.
8. Schwabe, J., Liebsch, G., Schirmer, U. (19-23 September 2016). Refined computation strategies for the new German Combined Quasigeoid GCG2016. Symposium on Geoid. *Gravity and Height Systems (GGHS2016)*. Thessaloniki, Greece.
9. Tscherning, C. C., Rapp, R. H. (1974). Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. *Report Department of Geodetic Science*, 208, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.

UDC 528.481

*Bohdan Dzhuman, Yaryna Nepeliak***ON THE REPRESENTATION OF ACF BY STHA-POLYNOMIALS  
FOR MODELING THE REGIONAL GRAVITATIONAL FIELD OF THE EARTH**

*The current Baltic height system in Ukraine is outdated and requires modernization. The current resolution of the Cabinet of Ministers of Ukraine states that "the implementation of topographic, geodetic and cartographic works starting from January 1, 2023 will be carried out using the UELN/EVRS2000 height system." For the successful integration of our height system into the European one, it is necessary to construct a high-precision model of the geoid surface on the territory of Ukraine, which should fit well with the European geoid model EGG2015. This will allow using advanced satellite technologies to determine gravity-dependent heights.*

The main methods of constructing the regional gravitational field of the Earth include the method of geopotential decomposition into series of spherical functions with fractional indices (in particular, the STHA-method) and least-squares collocation method. However, to date, no relationship has been established between them. The construction of ACF using STHA-polynomials, which wavelength is much shorter than the Legendre polynomials and depends on the area of the studied region, will significantly improve the accuracy of regional models of the Earth's gravitational field.

The approach to the construction of ACF using STHA-polynomials can be very promising precisely because the wavelength of these functions coincides with the area of the studied region, and all other properties coincide with the properties of Legendre polynomials. That is why it is necessary to perform ACF calculations using Legendre polynomials and STHA-polynomials and analyze the results.

The solution of this problem is realized by constructing and analyzing the covariance and cross-covariance functions of the geopotential functionals using Legendre polynomials and STHA-polynomials according to the Tscherning-Rapp model. A number of covariance and crossover-covariance functions are calculated and compared using Legendre polynomials and STHA-polynomials according to the Tscherning-Rapp model. The values of geoid heights obtained from GNSS-observations at the points of SGN of I, II and III classes in the territory of Lviv region are taken as input data.

A method for constructing a local ACF using STHA-polynomials is proposed and tested. STHA-polynomials have been found to be significantly more efficient than Legendre polynomials because their domain coincides with that of the region under study. For example, it is shown that for the Lviv region the decomposition of covariance functions in a series by Legendre polynomials up to order 600 is equivalent to the decomposition in a series by STHA-polynomials up to order 8.

**Keywords:** ACF; regional gravitational field; STHA-polynomials; height system.

**Fig.:** 6. References.: 9.

**Джуман Богдан Богданович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої геодезії та астрономії, Національний університет «Львівська політехніка» (вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна).

**Dzhuman Bohdan** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Geodesy and Astronomy, Lviv Polytechnic National University (12 S. Bandery Str., 79000 Lviv, Ukraine).

**E-mail:** teojuman@gmail.com

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2483-6833>

**SCOPUS Author ID:** 57205169776

**Непеляк Ярина Жданівна** – провідний інженер кафедри геодезії та землеустрою, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу (вул. Карпатська, 15, м. Івано-Франківськ, 76019, Україна).

**Nepeliak Yaryna** – Leading Engineer of the department of Geodesy and Land Management, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas (12 S. Bandery Str., 79000 Lviv, Ukraine).

**E-mail:** yarinanepeliak@gmail.com