*УДК 629.12.011*
*DOI: 10.25140/2411-5363-2021-1(23)-232-238*

*Олена Дакі, Роман Гімпель, Віталій Ткаченко, Ольга Бажак*

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ МОРСЬКИХ ОБ’ЄКТІВ ПРИ ХИТАВИЦІ

*У статті розроблено математичну модель для розв'язання комплексної задачі гідродинаміки та динаміки морських об'єктів довільної форми на хитавиці. Для моделювання гідродинаміки судна на хвилюванні доцільно використовувати математичні моделі єдиного двохфазного середовища повітря – вода. Такі моделі дозволять ефективно моделювати структуру потоку навколо морських об'єктів та коректно враховувати сили, які діють з боку в’язкого середовища для математичного моделювання руху вільного тіла в рідині. Модель хвилювання побудована з використанням функцій релаксацій на границях чисельного басейну, параметри якого були обґрунтовані в процесі проведення серії розрахунків з варіюванням розмірів розрахункових сіток.*

***Ключові слова:*** *гідродинаміка; зони релаксації; модель; морський об’єкт; хитавиця.*
*Рис.: 1.Бібл.: 13.*

**Актуальність теми дослідження.** В умовах глобалізації економічних процесів, збільшення населення планети, вичерпності корисних копалин на суходолі, світовий океан, який займає більшу частину нашої планети, являє собою зону виключних економічних інтересів країн. Уже нікого не дивують морські нафто- та газовидобувні платформи, морські трубопроводи та комунікації, морський старт космічних апаратів зі складних морських об’єктів. Тобто, крім класичних суден, з’являються об’єкти нових конструктивних типів, призначених для рішення складних завдань освоєння водного простору. Для конструювання таких складних об’єктів необхідне точне прогнозування їхньої поведінки при зовнішніх впливах морського середовища, в тому числі й хитавиці.

**Постановка проблеми**. З метою розроблення практичних проєктних рекомендацій необхідно правильно моделювати динамічне поводження морських об'єктів складної форми, тобто отримувати оцінки амплітудно-частотних та фазово-частотних характеристик (при розв’язанні задач у частотній області), отримувати характеристики динамічних процесів (при розв’язанні задач у часовій області). Існуючі математичні моделі стосовно морських об'єктів складної форми в наш час засновані на теорії ідеальної рідини, що значно звужує область можливого практичного застосування. Урахування в’язкісних характеристик рідини особливо необхідно при рішенні завдань, в яких необхідно враховувати складності фізичного процесу хвилеутворення, плівкові ефекти, кавітацію, відносно малу товщину прикордонного шару рідини. Задачі прогнозування динаміки поведінки морських об’єктів при хитавиці також вимагають урахування в'язкості, що і визначає актуальність цієї статті.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Теорія хитавиці розвивається з робіт Л. Ейлера та Д. Бернуллі. Ці роботи були розвинені В. Фрудом та А. Криловим. У середині ХХ століття була розроблена гідродинамічна теорія хитавиці (Н. Кочін та М. Хаскінд) [1; 2].

На теперішній час для визначення гідродинамічних характеристик морських об'єктів, зокрема й складних форм широко використовуються методи обчислювальної гідродинаміки, засновані на рішенні рівнянь Навьє-Стокса в різних постановках.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** При розробці сучасних теорій і методів розрахунку хитавиці морських об'єктів на хвилюванні характерно широке застосування паралельних обчислень, хмарних технологій. Застосування сучасних інформаційних технологій дозволило отримати якісно нові результати, засновані на уточнених математичних моделях спільної задачі гідродинаміки і динаміки судна. Однак на сьогодні для врахування деяких параметрів хитавиці морських об'єктів, таких як в’язкісні коефіцієнти, широко використовуються емпіричні формули, отримані експериментальним шляхом. Один з методів, заснований на моделі ідеальної рідини, – панельний метод, який застосовується до об'єктів довільної форми з нульовою швидкістю ходу [3]. Таке спрощення прийнятне для більшості закріплених або плавучих об'єктів, що використовуються на сьогодні в морській індустрії. У роботі [4] розроблено підхід для моделювання руху судна при хитавиці. У цьому методі використовується гібридна модель взаємодії хвиль і тіла. Хвильовий рух моделюється на основі потенційної теорії, у той час як рух рідини поблизу ділянки об'єкта, наприклад, корми, розглядається як в’язкий, та описується усередненим за Рейнольдсом рівняннями Навьє-Стокса. У роботі [5] використовувалася модель в’язкої рідини, в основі якої лежать рівняння Навье-Стокса, доповнені методом визначення об’єму рідини. Для моделювання хитавиці автори запропонували використовувати функцію джерела маси в рівнянні нерозривності. Метод був використаний у декількох чисельних експериментах для різних типів хвиль та показав гарні результати щодо генерації хвиль у стиснутій області (каналі) [6]. Однак більшість розрахунків було проведено у двомірній постановці задачі.

З огляду на наявні дослідження, питання моделювання динаміки морських об’єктів при хитавиці можна зробити висновок, що для моделювання гідродинаміки судна на хвилюванні доцільно використовувати математичні моделі єдиного двохфазного середовища повітря – вода, в основі якого лежать рівняння руху в’язкої рідини. Такі моделі дозволять ефективно моделювати структуру потоку навколо морських об'єктів та коректно враховувати сили, які діють з боку в’язкого середовища для математичного моделювання руху вільного тіла в рідині.

**Мета статті.** Розробка математичної моделі для розв’язання комплексної задачі гідродинаміки та динаміки морських об'єктів довільної форми на хитавиці.

**Виклад основного матеріалу.** Розробимо математичну модель руху вільного тіла в рідині. Оскільки тверде тіло має у загальному випадку шість ступенів свободи, то загальна система рівнянь руху повинна містити шість незалежних рівнянь. Їх можна представити у вигляді, який визначає похідні за часом від двох векторів: імпульсу та моменту тіла. Для опису руху твердого тіла можна користуватися трьома координатами його центра ваги та трьома ейлеровими кутами, які визначають орієнтацію даних осей $x, y, z$ рухомої системи координат відносно нерухомої системи $X, Y, Z$.

Нехай на тіло діє результуюча сила виду:

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_A + \vec{F}_P, \tag{1}$$

яка складається з сили тяжіння $\vec{F}_g = m\vec{g}$, сила Архімеда $\vec{F}_A$ та основного вектору гідродинамічних сил $\vec{F}_P$, а також результуюча пара

$$\vec{M}_c = \vec{M}_c^A + \vec{M}_c^P \tag{2}$$

у вигляді моментів сили Архімеда $\vec{M}_c^A$ та головного моменту гідродинамічних сил відносно центру мас $\vec{M}_c^P$.

Перенесений поступальний рух визначається трьома рівняннями руху в проєкціях на глобальні осі координат:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{X}_c &= F_X = F_{pX}; \\ m\ddot{Y}_c &= F_Y = F_{pY}; \\ m\ddot{Z}_c &= F_Z = mg + F_A + F_{pZ}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

де m – масса тіла.

Відносний обертальний рух тіла в проекціях на локальні рухомі осі визначається динамічними рівняннями Ейлера [7]:

$$\left.\begin{aligned} J_x\dot{\omega_x} - \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z &= M_X; \\ J_y\dot{\omega_y} - \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x &= M_Y; \\ J_Z\dot{\omega_z} - \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y &= M_Z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Якщо систему (4) доповнити кінематичними рівняннями Ейлера з точністю до малих першого порядку, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} J_x\ddot{\theta} &= M_X + \left(J_y - J_z\right)\omega_y\omega_z; \\ J_y\ddot{\psi} &= M_Y + \left(J_z - J_x\right)\omega_z\omega_x; \\ J_Z\ddot{\varphi} &= M_Z + \left(J_x - J_y\right)\omega_x\omega_y, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

де $J_x, J_y, J_Z$ – головні центральні моменти інерції маси твердого тіла відносно рухомих центральних осей $x, y, z$, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проєкції кутової швидкості судна та $M_X$, $M_Y$, $M_Z$ – проєкції головного моменту всіх сил на вісі $x, y, z$; $\Theta$ – кут крену; $\psi$ – кут диференту; $\varphi$ – кут рискання, а $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$ та $\ddot{\varphi}$ – відповідні кутові прискорення.

Системи диференціальних рівнянь (3) та (4) визначають рух вільного твердого тіла. Перша з них характеризує поступальний рух разом з центром мас щодо глобальних нерухомих осей, а друга описує обертальний рух навколо центра мас та містить моменти $M_X$, $M_Y$ та $M_Z$. зовнішніх сил щодо рухомих осей.

**Моделювання в'язкої рідини.**

Рух натурного судна на спокійній воді відбувається при досить високих значеннях числа Фруда $F_r = u/\sqrt{gL}$, як наслідок, при достатньо високих значеннях числа Рейнольдса: $R_e = uL/v > 10^8$, де $u$ – швидкість руху морського об'єкта, $L$ – його характерна довжина; $v$ – кінематична в'язкість рідини. У цьому випадку рух рідини носить турбулентний характер. Нині є чотири методи обчислення параметрів турбулентного руху рідини [8], які наведені на рис. 1.

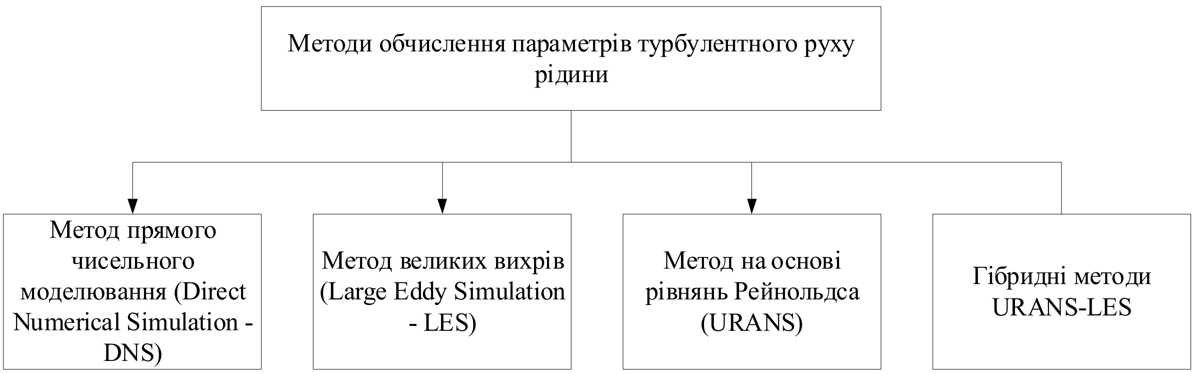


*Рис. 1. Методи обчислення параметрів турбулентного руху рідини [8]*

У цьому дослідженні використовується метод URANS у зв'язку з тим, що він має добру сходимість для розв'язання інженерних задач обчислювальної гідродинаміки, пов'язаних з обчисленнями турбулентного обтікання морських об'єктів.

**Моделювання вільної поверхні.**

На теперішній час існує два основних методи для моделювання вільної поверхні. У першому методі вільна поверхня представляє собою границю розрахункової області, що змінюється з часом. На границі ставляться кінематичні та динамічні граничні умови, які визначають її еволюцію. При цьому вважається, що поверхня розділу фаз вода-повітря змінюється не суттєво. У літературі цей напрям відомий за назвою методу спостереження за інтерфейсом (interface-tracking method). Інший метод отримав назву методу захоплення (або фіксації) інтерфейсу (interface-capturing), газ та краплинна рідина розглядається як багатофазне середовище, яке являє собою єдину субстанцію, але що має різні властивості [9].

**Математична гідродинамічна модель.**

Турбулентна течія в'язкої нестискаємої рідини може бути описана усередненими рівняннями нерозривності та Рейнольдса:

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_i}=0;$$

$$\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial t}+\langle u_j\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}=\frac{-\partial\langle p\rangle}{p\partial x_j}+\frac{\partial^2\langle u_i\rangle}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial\langle u_i^{/}u_j^{/}\rangle}{\partial x_j}+g_i+F_\sigma, \tag{6}$$

де $F_\sigma$ – сила поверхневого натягу рідини.

Розглядається абсолютний рух рідини та область руху переміщується відносно нерухомої системи координат. Границя розділу фаз повітря – вода може бути ефективно описана за допомогою методу об'ємної фракції рідини VoF [10].

$$\frac{\partial\alpha_q}{\partial t}+\frac{\partial\langle u_i\rangle\alpha_q}{\partial x_j}=\frac{-\partial\langle\alpha_q(1-\alpha_q)U_r\rangle}{\partial x_j}, \tag{7}$$

де $U_r$ – поле швидкості стискання границі, а фактично – антидифузія. Введений параметр $\alpha_q(1-\alpha_q)$ активний лише поблизу границі.

Для замикання рівняння Рейнольдса використовується градієнтно-дифузна гіпотеза:

$$\langle u_i^{/}u_j^{/}\rangle=2v_t\langle S_{ij}\rangle,\quad S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_j}+\frac{\partial\langle u_j\rangle}{\partial x_i}\right), \tag{8}$$

де $v_t$ – турбулентна в'язкість, локально ізотропна та $k-\omega$ SST модель турбулентності [11]:

$$v_t=\frac{\alpha_1 k}{max(\alpha_1,\omega,SF_2)}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\langle u_j\rangle\ \frac{\partial k}{\partial x_j}=P_k-\beta k\omega+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(v+\sigma_k v_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right]; \tag{10}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\langle u_j\rangle\ \frac{\partial\omega}{\partial x_j}=\alpha S^2-\beta\omega^2+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(v+\sigma_\omega v_t)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+2(1-F_1)\sigma_{\omega^2}\frac{\partial k\partial\omega}{\omega\partial^2 x_i}, \tag{11}$$

де

$$F_2=tanh\left[\left(max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta\omega y};\frac{500v}{y^2\omega}\right)\right)^2\right]; \tag{12}$$

$$P_k=min\left(\tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial x_j};10\beta k\omega\right); \tag{13}$$

$$F_1=tanh\left[\left\{min\left(max\left[\frac{2\sqrt{k}}{\beta\omega y};\frac{500v}{y^2\omega}\right];\frac{4\sigma_{\omega^2}k}{CD_{k\omega}y^2}\right)\right\}^2\right]; \tag{14}$$

$$CD_{k\omega}=max\left(2\rho\sigma_{\omega^2}\frac{\partial k\partial\omega}{\omega\partial^2 x_i};10^{-10}\right); \tag{15}$$

$$\phi=\phi_1F_1-\phi_2(1-F_1) \qquad 16)$$

з коефіцієнтами: $\alpha_1=\frac{5}{9}$; $\alpha_2=0{,}44$; $\beta_1=3/40$; $\beta_2=0{,}0828$; $\sigma_{k1}=0{,}85$; $\sigma_{k2}=1$; $\sigma_{\omega1}=0{,}85$; $\sigma_{\omega2}=0{,}856$.

Методика моделювання турбулентного руху в'язкої рідини з вільною поверхнею представлена та підтверджена в [12].

Початкові умови. У початковий момент часу покладається, що відомі компоненти вектора швидкості, тиск, кінетична енергія турбулентності та швидкість її дисипації, розподіл об'ємної фракції рідини.

**Моделювання хвилювання.**

Для чисельного моделювання потоків із гравітаційними хвилями звичайно використовуються два різних методи. Один із них заснований на гіпотезі безвихрового (потенційного) руху. Для моделювання потоку використовується спектральна теорія або застосовуються граничні інтегральні рівняння. Інший метод заснований на рівняннях Навьє-Стокса або Ейлера, які розв'язуються без явних спрощень [2; 8].

Потенційним потоком можна точно описати нестаціонарні гравітаційні хвилі кінцевих амплітуд, що можуть моделюватися з усіма нелінійними ефектами та без якого-небудь істотного хвильового загасання [9]. Однак взаємодія хвиль із течіями, зокрема, з полями кутових швидкостей, таким методом описати складно через властиві спрощення. Вплив в'язкості або турбулентності на рух хвилі також не може бути врахований.

При розв'язанні рівнянь Навьє-Стокса такі обмеження, пов'язані з відсутністю кутових швидкостей, в'язкості й турбулентності, не накладаються. Водночас розв'язання нестаціонарних рівнянь Навьє-Стокса для опису вільної поверхні звичайно призводять до порівняно великих числових помилок, що не дозволяє проводити точні довгострокові реалізації гравітаційних хвиль. Ці помилки виявляються головним чином у таких випадках.

По-перше, дуже складно точно описати геометрію вільної поверхні та її еволюцію в часі, якщо тільки область рідини не дискретизована досить точно в межах її границь, наприклад, використовуючи метод спостереження за вільною поверхнею. У цьому випадку граничні умови повинні бути сформульовані в рухомій системі координат, що призводить до значного збільшення часу на проведення чисельного моделювання. Такий підхід був введений у роботі Чана [13], який часто називають методом рухомої сітки (Arbitrary Lagrangian-Eulerian – ALE).

По-друге, для умов нестисливого потоку граничні умови звичайно модифікують, щоб забезпечити коректний зв'язок між полем швидкості і полем тиску. Це робиться або шляхом введення в граничні умови параметрів, що моделюють штучну стискальність, або з використанням методів, заснованих на SIMPLE/PISO алгоритмах, методах маркерів (MAC) або дробового кроку.

Реалізація граничних умов щодо тиску для твердих стінок у цих методах відносно проста, однак, на вільній поверхні вони працюють обмежено, оскільки необхідне точне визначення абсолютного значення тиску для правильного опису переносу між потенційною та кінетичною енергією в хвильовому русі.

Для рішень даних проблем використовується модифікована версія методу VoF [10], що зводиться до введення штучного члена для піджимання інтерфейсу поблизу вільної поверхні, а для виключення чисельних помилок, накопичених згодом при моделюванні гравітаційних хвиль, вводяться зони релаксації.

**Висновки.** Для коректного розв'язання задачі урахування хитавиці морського об'єкту необхідне повне урахування всіх складових зовнішніх впливів. Насамперед це стосується параметрів моделі турбулентності, що визначають величину результуючої сили.

Сьогодні усі методи, які використовуються в обчислювальній гідродинаміці для розв'язання рівнянь руху в'язкої рідини, поєднують під одною загальною назвою – проєкційний метод. Таке узагальнення пов'язане насамперед із тим, що будь-яку апроксимацію можна розглядати як спосіб побудови мінімізуючої послідовності похибок рішення на множині проекційних функцій.

Модель хвилювання побудована з використанням функцій релаксацій на границях чисельного басейну, параметри якого були обґрунтовані в процесі проведення серії розрахунків з варіюванням розмірів розрахункових сіток.

## Список використаних джерел

1. Кочин Н. Е. Введение в теоретическую гидромеханику. Москва : Гостехтеоритиздат, 1932. 418 с.

2. Хаскинд М. Д. Гидродинамическая теория качки корабля на волнении. *ПММ*. 1946. Т. X. Вып. 1. С. 3-37.

3. Journee, J.M.J. & Massie, W.W. 2001. Offshore Hydromechanics. Delft University of Technology.

4. Luquet, Romain & Alessandrini, B., Ferrant, P., Gentaz, L. (2004). Simulation of the viscous Flow past a Ship in Waves using the SWENSE Approach.

5. Lin P., Liu P.L.-F. Internal wave-maker for Navier-Stokes equations models. *J. Waterway Port Coastaland Ocean Eng*. 1999. Vol. 125. № 4. Pp. 207-215.

6. Lin P., KarunarathnaS.A.S. Numerical study of solitary wave interaction with porous breakwaters. *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng*. 2007. Vol. 133. № 5. Pp. 352-363.

7. Шахверди Г.Г. Исследование ударного взаимодействия твёрдых тел с жидкостью потенциальным методом конечных элементов. Казань, 2005. Том 1. Изд-во Казанского ун-та, С. 110–118.

8. Pope S.B. Turbulent flow. Cambridge Uni. Press, 2005. P. 771.

9. Carrica P., Wilson R., Stern F. Single-phase level set method for unsteady viscous free surface flows. *Mecanica Computacional*. 2004. V. XXIII. Pp. 1613-1631.

10. H. Rusche, Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions (Ph.D. thesis), Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2002.

11. F. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAAJ*. 1994. № 32. Pp. 1598-1605.

12. Елизарова Т. Г. Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках. *Математическое моделирование.* 2013. Т. 25, № 3. С. 75–88.

13. R.K.C. Chan, A generalized arbitrary Lagrangian–Eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces. *J. Comput. Phys*. 1975. № 17. Pp. 311–331.

## References

1. Kochin, N.E. (1932). *Vvedenie v teoreticheskuiu gidromekhaniku [Introduction to theoretical fluid mechanics]*. Gostekhteoritizdat.

2. Khaskind, M. D. (1946). *Gidrodinamicheskaia teoriia kachki korablia na volnenii [Hydrodynamic theory of the rocking of a ship on waves]. PMM – PMM,* X(1), pp. 3-37.

3. Journee, J.M.J. & Massie, W.W. (2001). *Offshore Hydromechanics*. Delft University of Technology.

4. Luquet, Romain & Alessandrini, B., Ferrant, P., Gentaz, L. (2004). *Simulation of the viscous Flow past a Ship in Waves using the SWENSE Approach.*

5. Lin, P., Liu, P.L.-F.(1999). *Internal wave-maker for Navier-Stokes equations models*, (4), pp. 207-215.

6. Lin, P., Karunarathna, S.A.S. (2007). *Numerical study of solitary wave interaction with porous breakwaters*, *(*5), pp. 352-363.

7. Shakhverdi, G. G. (2005). *Issledovanie udarnogo vzaimodeistviia tverdykh tel s zhidkostiu potentcialnym metodom konechnykh elementov [Investigation of the shock interaction of solids with a liquid by the potential finite element method]* (pp. 110-118).

8. Pope, S.B. (2005.). *Turbulent flow*. Cambridge Uni.

9. Carrica, P., Wilson, R., Stern, F.(2004). *Single-phase level set method for unsteady viscous free surface flows.* Mecanica Computacional (pp. 1613-1631).

10. H. Rusche. (2002). *Computational fluid dynamics of dispersed two-phase flows at high phase fractions.* Technology and Medicine.

11. F. Menter. (1994). *Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications*. AIAAJ, 32, pp. 1598-1605.

12. Elizarova, T. G. (2013). Chislennoe modelirovanie kolebanii zhidkosti v toplivnykh bakakh [Numerical Simulation of Fluid Oscillations in Fuel Tanks]. *Matematicheskoe modelirovanie – Math modeling,* 25(3), pp. 75–88.

13. R.K.C. Chan. (1975). A generalized arbitrary Lagrangian–Eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces. *Phys*, (17), pp. 311–331.

*UDC 629.12.011*

*Olena Daki, Roman Gimpel, Vitaliy Tkachenko, Olga Bazhak*

# MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMICS OF MARINE OBJECTS DURING SHIP MOTIONS

*In order to develop practical design recommendations, it is necessary to model correctly the dynamic behavior of marine objects of complex shape, to obtain estimates of amplitude-frequency and phase-frequency characteristics (when solving problems of the frequency domain), to obtain characteristics of dynamic processes (when solving problems of the time domain). Analysis of research and publications on this issue has shown that the existing mathematical models for marine objects of complex shape are currently based on the theory of an ideal fluid, which significantly narrows the scope of practical application. The aim of the article is to develop a mathematical model for solving a complex problem of hydrodynamics and dynamics of marine free-shape objects during ship motions. The paper notes that taking into account the viscosity characteristics of the fluid is especially necessary when solving problems that require consideration of the complexity of the physical process of wave formation, film effects, cavitation, relatively small thickness of the boundary layer of the fluid. In order to correctly solve the problem of taking into account the oscillation of a marine object, it is necessary to fully take into account all the components of external influences. This primarily applies to the parameters of the turbulence model, which determine the magnitude of the resulting force. At present, all the methods used in computational hydrodynamics to solve the equations of motion of a viscous fluid are united under one common name - the projection method. This generalization, first of all, is due to the fact that any approximation can be considered as a way to construct a minimizing sequence of solution errors on the set of projection functions. The article for the first time develops a mathematical model for solving a complex problem of hydrodynamics and dynamics of marine free-shape objects during ship motions. The wave model was constructed using relaxation functions at the boundaries of a numerical basin, which parameters were substantiated in the process of conducting a series of calculations with variations in the sizes of the calculation grids.*

*The wave model was constructed using relaxation functions at the boundaries of a numerical basin, the parameters of which were substantiated in the process of conducting a series of calculations with variations in the sizes of the calculation grids.*

***Keywords:*** *hydrodynamics, relaxation zones, model, marine object, ship motions.*

*Fig .: 1. Reference: 13.*

**Дакі Олена Анатоліївна –** доктор технічних наук, доцент, директор Дунайського інституту водного транспорту, Державний університет інфраструктури та технологій (вул. Фанагорійська, 7, м. Ізмаїл, 68600, Україна).
**Daki Olena –** Doctor of Technical Sciences Associate Professor, Director of Danube Institute of Water Transport, State University of Infrastructure and Technologies (7 Fanagoriyska Str., 68600 Izmail, Ukraine).
**E-mail:** daki-olena@ukr.net
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-3932-462X

**Гімпель Роман Михайлович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті. Дунайський інститут водного транспорту Державного університету інфраструктури та технологій (вул. Фанагорійська, 7, м. Ізмаїл, 68600, Україна).
**Gimpel Roman** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Navigation and Operation of Technical Systems on Water Transport. Danube Institute of Water Transport of the State University of Infrastructure and Technology (7 Fanagoriyska Str., 68600 Izmail, Ukraine).
**E-mail:** roma.gimpel@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-0546-6654

**Ткаченко Віталій Володимирович** – старший викладач кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті. Дунайський інститут водного транспорту Державного університету інфраструктури та технологій (вул. Фанагорійська, 7, м. Ізмаїл, 68600, Україна).
**Tkachenko Vitaliy** – Senior Lecturer of the Department of Navigation and Operation of Technical Systems on Water Transport. Danube Institute of Water Transport of the State University of Infrastructure and Technology (7 Fanagoriyska Str., 68600 Izmail, Ukraine).
**E-mail:** vvt1960@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-9142-0515

**Бажак Ольга Валеріївна –** асистент кафедри судноводіння та експлуатації технічних систем на водному транспорті. Дунайський інститут водного транспорту Державного університету інфраструктури та технологій (вул. Фанагорійська, 7, м. Ізмаїл, 68600, Україна).
**Bazhak Olga–** Assistant of the Department of Navigation and Operation of Technical Systems on Water Transport. Danube Institute of Water Transport of the State University of Infrastructure and Technology (7 Fanagoriyska Str., 68600 Izmail, Ukraine).
**E-mail:** olyabazhak@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-0598-5235

Дакі О., Гімпель Р., Ткаченко В., Бажак О. Математичні моделі динаміки морських об’єктів при хитавиці. *Технічні науки та технології.* 2021. № 1(23). С. 232-238.