

DOI: 10.25140/2411-5363-2022-1(27)-54-59

УДК 621.9.06

**Сергій Струтинський<sup>1</sup>, Роман Семенчук<sup>2</sup>**<sup>1</sup>доктор технічних наук, доцент кафедри Прикладної гідроаеромеханіки і мехатроніки<sup>2</sup>аспірант кафедри прикладної гідроаеромеханіки і мехатроніки

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)

**E-mail:** [strutynskiy@gmail.com](mailto:strutynskiy@gmail.com), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9739-0399>**Scopus Author ID:** [57194195005](https://orcid.org/0000-0001-9739-0399)<sup>2</sup>аспірант кафедри прикладної гідроаеромеханіки і мехатроніки

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)

**E-mail:** [roma.semenchuk@gmail.com](mailto:roma.semenchuk@gmail.com), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9470-2756>**Scopus Author ID:** [57203868827](https://orcid.org/0000-0001-9470-2756)

## РОЗРОБЛЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС ЦИКЛОЇДАЛЬНИХ ПЕРЕДАЧ

Запропоновані спеціальні методи та математичні моделі, що дозволяють описати реальний профіль поверхні колеса циклоїдальної передачі. Розроблена методологія визначення параметрів точності за допомогою аналізу відмінностей між геометрією поверхні дослідного зразка та теоретичним профілем. При моделюванні застосовано сплайн-інтерполяцію. Розроблена методика дозволяє за допомогою рядів Фур'є визначити реальний профіль сателіту, що дає можливість більш вірогідно оцінити точність на етапі виготовленої передачі. При визначенні геометричних параметрів сателіту пропонується застосувати вірогідніших методів. Результати моделювання дозволяють визначити не лише інтегральні характеристики геометрії поверхні. Вони придатні для визначення точності виготовлення сателіту та характеристик циклоїдальної передачі в цілому.

**Ключові слова:** епіциклоїдальне профіль за допомогою ряду Фур'є; гіпоциклоїдальне зачеплення; високоточний шарнір; дослідження точності циклоїдального редуктора; циклоїдальна передача.

Рис.: 4. Бібл.: 6.

**Актуальність теми дослідження.** Нині спостерігається значний попит на нові розробки та промислові рішення в галузі робототехніки. Робототехнічні комплекси стають дедалі доступнішими, в тому числі за рахунок швидкої автоматизації роботи підприємств. Собівартість пристроїв знизилася на 30 %, а експерти в галузі промислового виробництва роблять прогнози щодо подальшого її падіння. Варто зазначити, що роботизовані маніпулятори застосовуються не лише на великих виробничих майданчиках, а також на малих та середніх підприємствах. При цьому затребуваними є високоточні, малогабаритні та надійні механізми.

Перспективними напрямками підвищення технічного рівня роботизованих комплексів та їхніх поворотних шарнірів є збільшення точності, плавності ходу, вантажопідйомності та довговічності механізму та його вузлів.

Для забезпечення високої питомої потужності поворотних вузлів широко використовуються циклоїдальні передачі. Вони також забезпечують високе передатне відношення та є компактними. За умови оптимального проєктування передач на основі розрахунків на міцність, неточності виготовлення циклоїдальних коліс визначають повторюваність, що забезпечується редуктором.

Дослідження реальної геометрії зубчастих коліс та визначення їхніх інтегральних параметрів поверхонь дозволяє підвищити розрахункову точність роботизованих комплексів та уникнути браку при їх виготовленні, що зумовлений незадовільними параметрами точності поворотних вузлів. Саме тому дослідження з цієї теми є актуальними та мають перспективи практичного застосування.

**Постановка проблеми.** Похибки виготовлення циклоїдальної передачі визначають величину неузгодженості кутів повороту сателіта для передач із епіциклоїдальним та гіпоциклоїдальним зачепленням. Вони визначають точність поворотного вузла роботизованого комплексу та його основні характеристики.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** До елементної бази, що визначає характеристики роботизованих систем, можна віднести циклоїдальні передачі без проміжних тіл кочення. Дослідженню даних передач присвячено роботи [1-3]. У публікації [4] наведені результати моделювання статичних та динамічних характеристик, а також досліджено вплив характеристик складових частин механізму на інтегральні параметри точності. Точність виготовлення деталей механічних передач також впливає на надійність та довговічність механізму.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Сателіт циклоїдальної передачі відрізняється складним профілем (рис. 1), причому для оцінки похибок його поверхні зазвичай недостатньо інтегральних величин. Для визначення неточностей геометрії сателіту необхідна спеціальна методика. Вона потребує застосування математичної моделі реальної поверхні профілю сателіту та дозволяє визначити його основні геометричні параметри. Реальний профіль буде відрізнятися від теоретичного, і це буде призводити до виникнення похибок, у гіршому випадках – заклинювання, а при невеликих погрішностях не буде забезпечуватися необхідна плавність руху та точність повторного позиціонування поворотного вузла маніпулятора.

**Мета роботи.** Циклічна природа кривої, що визначає твірну поверхню деталі дозволяє використати оптимізовані математичні моделі, що враховують особливості практичного застосування елементів механічної передачі, зокрема ряди Фур'є. Математичний апарат дає можливість провести точну обробку масиву експериментальних даних та, порівнявши їх із теоретичним профілем, отримати характеристики поверхні деталі, на основі яких визначається точність досліджуваної конструкції циклоїдальної передачі.

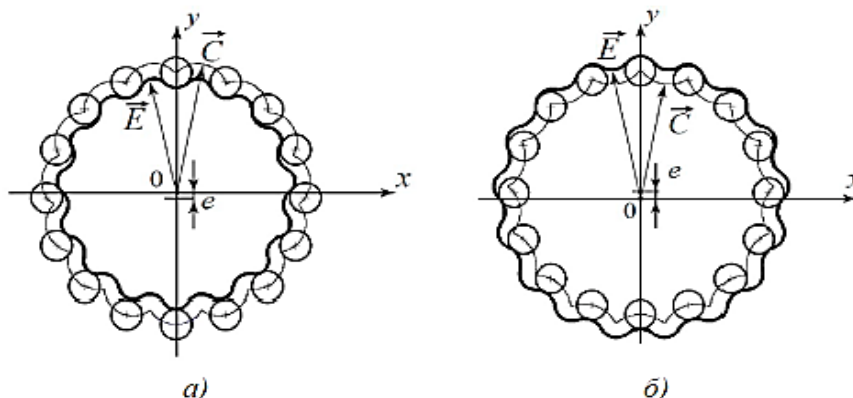


Рис. 1. Епіциклоїдальне (а) та гіпоциклоїдальне (б) зачеплення

Джерело: [7].

**Виклад основного матеріалу.** Апробація запропонованої методики потребує твердотільного моделюванням деталей передачі, виготовлення та подальшого дослідження серійних зразків. Розроблений метод дозволяє визначити параметри точності шляхом аналізу відмінностей між геометрією поверхні дослідного зразка та даними математичного моделювання, що відповідають теоретичному профілю (рис. 2, а).

Вхідні параметри визначення неточності виготовлення будуть значення можливих допусків, що буде представлятися у як набір випадкових величин з певним розсіюванням у відповідності до рівня невизначеності. Процес аналізу буде мати наступну структуру:

1. Визначення моделі/алгоритму, який найбільш точно відображають поведінку системи.
2. Тестування обраної моделі  $N$  разів, використовуючи випадкові величини, в діапазоні максимальних значень похибки  $(-t; +t)$ , щоб отримати вихідні дані моделі. Для отримання середнього значення, відхилення, інтервали використовуємо звичайні методи статистики.

При вимірювання реального робочого профілю сателіту циклоїдальної передачі відбувається зміщення по фазі (рис. 2, б). Зміщення, що виникає необхідно врахувати при розробці методики визначення точності профілю. При виготовленні у якості базуючої поверхні може використовуватися отвір (циліндричний виступ на деталі). При технологічних операціях обробки заготовки буде виникати похибка обумовлена наявністю ексцентриситета між реальною поверхнею отвору деталі та теоретичного. Це знижує точність зубчастого колеса та передачі загалом.

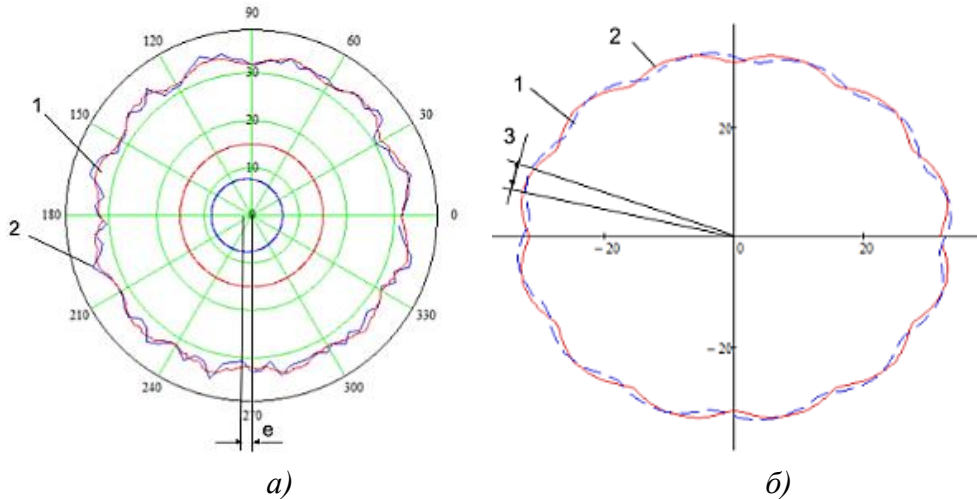


Рис. 2. Графік зміщення геометрії профілю (похибка збільшена для візуального відображення):

*a* – внаслідок неточності виготовлення; *б* – по кутовій координаті;  
 1 – теоретичний ідеальний профіль; 2 – реальний профіль з похибкою;  
 3 – кутове зміщення; *e* – ексцентриситет

Джерело: розроблено авторами. Побудовані за викладеною методологією в цій статті.

Аналізуючи зв'язок між вхідними та вихідними даними можна пояснити відносну значущість факторів, що впливають на точність позиціонування кінцевого робочого/виконавчого елемента маніпулятора (деталі). Проаналізувавши систему, можна визначити додаткові заходи із взаємодії та вдосконалення системи.

Для побудови еквідистанти, що визначає теоретичну твірну поверхню зубчастого колеса, використано методику, що представлена в джерелі [5]. Відповідно рівняння профілю сателіта в параметричній формі матимуть вигляд:

$$x_{2k} = \frac{e \cdot z_2}{\lambda} \cdot \cos(t_k) - e \cdot \cos(z_2 \cdot t_k) - r \cdot \cos(t_k);$$

$$y_{2k} = \frac{e \cdot z_2}{\lambda} \cdot \sin(t_k) - e \cdot \sin(z_2 \cdot t_k) - r \cdot \sin(t_k),$$

де  $r$  – радіус кола, що обертається навколо фіксованої осі обертання.

Тоді рівняння укороченої епіциклоїди в параметричному вигляді:

$$x_k = \frac{e \cdot z_2}{\lambda} \cdot \cos(t_k) - e \cdot \cos(z_2 \cdot t_k);$$

$$y_k = \frac{e \cdot z_2}{\lambda} \cdot \sin(t_k) - e \cdot \sin(z_2 \cdot t_k),$$

де  $x_{2k}$ ,  $y_{2k}$  – координати точок, що отримані шляхом підстановки параметра  $t_k = 0 \dots 1$ ;  $e$  – ексцентриситет;  $\lambda$  – коефіцієнт укороченої епіциклоїди;  $z_2$  – число зубців колеса.

На основі відомих моделей отримано ряд кривих, що визначають профіль поверхні зубчастого колеса циклоїдальної передачі (рис. 2). Теоретичний профіль має циклічну природу та може бути представлений у вигляді ряду Фур'є згідно із загальною методикою, що розглянута нижче.

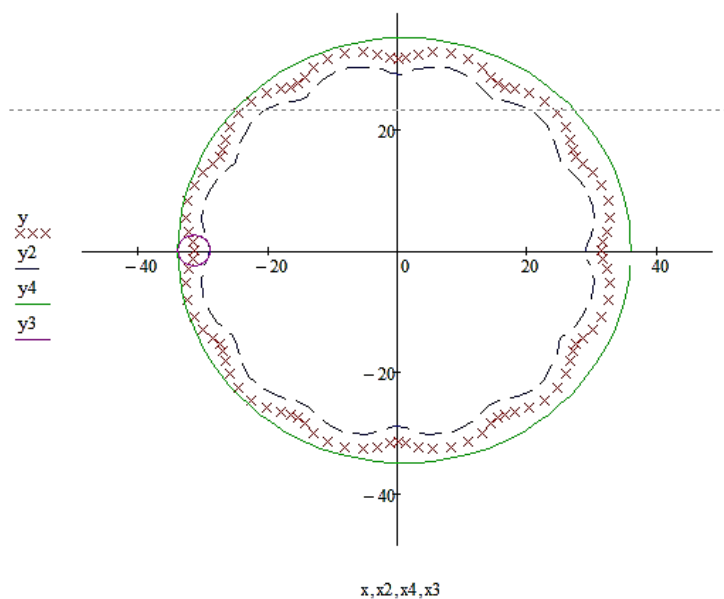


Рис. 3. Профіль сателіта в параметричному вигляді:

$y$  – профіль укороченої епіциклоїди;  $y2$  – профіль сателіта;  $y3$  – проміжне положення кола, яке обертається, утворюючи профіль;  $y4$  – профіль, утворений обертанням центра кола, що обертається навколо т.  $O$

Джерело: розроблено авторами. Побудовані за викладеною методологією у даній статті.

Визначення профілю реальної поверхні колеса циклоїдальної передачі здійснюється на координатно-вимірювальній машині. У результаті отримується набір точок, що визначають поверхню деталі.

Знаходження твірної поверхні за дискретними значеннями здійснюється шляхом сплайн-інтерполяції. Вона реалізується за допомогою вбудованої функції *cspline* пакета *MathCad* [6]:

$$ks := cspline(X, Y);$$

$$y5(w) := interp(ks, X, Y, w),$$

де  $ks$  – змінна функції сплайн-інтерполяції, що створює вектор коефіцієнтів кривої, яка наближує до кубічної параболи в граничних точках;

$y5(x)$  – функція кубічної сплайн-інтерполяції.

Вбудовані інструменти програмного комплексу дозволяють здійснити перетворення Фур'є та отримати гармонічний ряд, що апроксимує дискретні значення поверхні зубчастого колеса.

Відповідно реальний профіль твірної поверхні та теоретичний епіциклоїдальний профіль можна описати за допомогою рядів Фур'є:

$$a_n := \frac{\int_0^{2\pi} f_{c1}(w+2\pi) \cdot \cos(n \cdot w) dw}{\pi};$$

$$b_n := \frac{\int_0^{2\pi} f_{c1}(w+2\pi) \cdot \sin(n \cdot w) dw}{\pi};$$

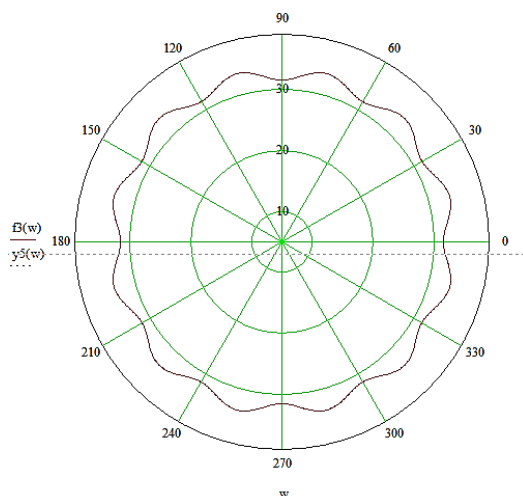
$$f3(w) := \frac{a_0}{2} + [\sum_{n=1}^m (a_n \cdot \cos(n \cdot w) + b_n \cdot \sin(n \cdot w))],$$

де  $a_0, a_n, b_n$  – коефіцієнти функції ряду Фур'є;

$f3(w)$  – функція тригонометричного ряду Фур'є;

$m$  – кількість гармонік;  $n = 0..m$ .

**Результати та обговорення.** Результати досліджень дозволяють отримати криву, що описує реальний профіль твірної колеса циклоїдальної передачі з допомогою ряду Фур'є (рис. 4), а також теоретичний профіль.



*Рис .4. Побудований епіциклоїдальний профіль сателіта, описаний за допомогою ряду Фур'є –  $f_3(w)$*

Джерело: розроблено авторами.

Математична модель реального профілю у подальшому порівнюється з еталонним профілем із використанням методів Монте-Карло [6].

Це дає можливість врахувати наявність ексцентриситету та зсуву по фазі, що наявні для реальної поверхні.

**Висновки.** Розроблена математична модель забезпечує високий ступінь відповідності експериментальним даним, що дозволяє оперувати нею у процесі дослідження характеристик поверхні деталі. Використання гармонічних функцій при описі поверхні дозволяє скористатися інструментами спектрального аналізу, а також статистичними методами для визначення похибок виготовлення деталі. Ця методика реалізується шляхом порівняльного аналізу теоретичних даних та залежностей, що отримані експериментально. Врахування стохастичних параметрів при моделюванні дає можливість більш точно оцінити похибки реальної поверхні зубчастого колеса та більш точно визначати характеристики механічної передачі, що складається з двох або більше зубчастих коліс.

#### Список використаних джерел

1. Наземные военные роботы ВС США [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.modernarmy.ru/article/256/nazemnie-voennie-roboti-ssha>.
2. Кинематический анализ планетарно-цевочных механизмов / А. С. Иванов [и др.] // Вестник машиностроения. – 2012. – № 8. – С. 22-25.
3. Каратушин С. И. Моделирование контактных нагрузок в среде ANSYS для неэвольвентных зацеплений / С. И. Каратушин, Д. А. Храмова, П. Н. Бокучава // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2018.
4. Strutynskyi S. Investigation of the accuracy of the manipulator of the robotic complex constructed on the basis of cycloidal transmission / S. Strutynskyi, R. Semenchuk // Technology audit and production reserves. – 2021. – Vol. 4 No. 1(61). – Pp. 6-14.
5. Носков К. А. Циклоидальные редукторы приводов технологического оборудования / К. А. Носков, А. В. Липов, Г. С. Бальшаков // Выпускная квалификационная работа. – Пенза, 2017. – С. 7-9.
6. Киричок П. О. Спеціальні методи наукових досліджень : підручник / П. О. Киричок, С. В. Струтинський, В. Г. Олійник. – К. : Вид. дім «Артек», 2016. – 592 с.



### References

1. Nazemnye voennye roboty VS SShA [Ground military robots of the US Armed Forces]. <http://www.modernarmy.ru/article/256/nazemnie-voennie-roboti-ssha>.
2. Ivanov A.S. et al. (2012). Kynematicheskii analiz planetarno-tsevochnykh mekhanizmov [Kinematic analysis of planetary pinion mechanisms]. *Vestnik mashinostroeniia – Bulletin of mechanical engineering*, (8), 22-25.
3. Karatushin, S.I., Khramova, D.A., & Bokuchava, P.N. (2018). Modeling of contact loads in the ANSYS environment for non-involute gears [Modeling of contact loads in the ANSYS environment for non-involute gears]. *Izvestiia vysshykh uchebnykh zavedenii. Masinostroenie – News of higher educational institutions. Engineering*.
4. Strutynskiy, S., & Semenchuk, R. (2021). Investigation of the accuracy of the manipulator of the robotic complex constructed on the basis of cycloidal transmission. *Technology audit and production reserves*, 4(1(61)), 6-14.
5. Noskov K.A., Lipov A.V., & Balshakov G.S. (2017). Tsykloydalnye reduktory pryvodov tekhnolohycheskoho oborudovaniya [Cycloidal gearboxes for drives of technological equipment]. *Final qualification work*.
6. Kirichok, P.O., Strutynskiy, S.V., & Oliynik, V.G. (2016). *Spetsialni metody naukovykh doslidzhen [Special methods of scientific research]*. Artek.

Отримано 21.01.2022

UDC 621.9.06

### *Serhii Strutynskiy<sup>1</sup>, Roman Semenchuk<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Doctor of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Fluid mechanics and mechatronics  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” (Kyiv, Ukraine)

E-mail: [strutynskiy@gmail.com](mailto:strutynskiy@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9739-0399>

Scopus Author ID: [57194195005](https://orcid.org/0000-0001-9739-0399)

<sup>2</sup>PhD student at the Department of Fluid mechanics and mechatronics  
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” (Kyiv, Ukraine)

E-mail: [rom.semenchuk@gmail.com](mailto:rom.semenchuk@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9470-2756>.

Scopus Author ID: [57203868827](https://orcid.org/0000-0001-9470-2756)

### DEVELOPMENT OF SPECIAL MATHEMATICAL MODELS FOR RESEARCH OF ACCURACY OF REAL SURFACES OF TEETH WHEELS OF CYCLOIDAL TRANSMISSIONS

*Promising areas for improving robotic systems based on cycloidal gears aimed to increase their accuracy and other performance characteristics. The accuracy of the rotary unit and the mechanism as a whole is determined by errors in the manufacture of the transmission. Integral quantities are not enough to assess the accuracy of the transmission wheels. To determine the errors of the geometry of parts requires a technique that includes modeling of its real surface.*

*The cyclic nature of the curve that defines the generating surface of the wheel allows the use of optimized mathematical models based on Fourier series. The technique allows for accurate processing of experimental data and compare them with the theoretical profile. Approximation of the concept requires modeling of the theoretical profile and research of the manufactured parts.*

*The method allows to determine the parameters of the wheels by analyzing the differences between the simulated surface of the part and the theoretical profile. A hole in the part can be used as a base surface in the manufacture. Determination of the surface profile of the transmission wheel is carried out on a coordinate measuring machine, which allows to get a set of points.*

*Surface modeling by discrete values is performed by spline interpolation. In the future, the description of the surface is performed using harmonic functions. The proposed mathematical apparatus allows the use of spectral analysis tools and statistical methods. The harmonic series is obtained by means of the Fourier transform. Monte Carlo methods allow to compare the mathematical model of the real profile of the mechanical transmission wheel and the theoretical surface. This makes it possible to take into account the presence of eccentricity, phase shift and other features of the part when determining the accuracy parameters.*

*The mathematical model allows to effectively use experimental data in determining the characteristics of the surface of the part. The use of stochastic parameters in modeling makes it possible to take into account the accuracy of the wheel and increase the accuracy of determining the parameters of mechanical transmission.*

**Keywords:** *epicycloidal profile with the help of Fourier series, hypocycloidal gearing, high-precision hinge; study of the accuracy of the cycloidal reducer; cycloidal transmission.*

Fig.: 4. References: 6.