

**Ольга Бондар<sup>1</sup>, Олександр Пузирьов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій  
Економіко-технологічний інститут ім. Р. Ельворті (Кропивницький, Україна)  
E-mail: [bondarkla@ukr.net](mailto:bondarkla@ukr.net). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5877-5667>

<sup>2</sup>кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри прикладної механіки  
Економіко-технологічний інститут ім. Р. Ельворті (Кропивницький, Україна)  
E-mail: [olexandreti@gmail.com](mailto:olexandreti@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2158-3714>

**ПРО ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ОСІ Й КУТА ПОВОРОТУ ПЕРЕРІЗУ ПРУЖНОЇ БАЛКИ**

На основі принципів та підходів функціонального аналізу інженерних методів розрахунку машинобудівних конструкцій на жорсткість у статті представлено отримані точні розв'язки рівнянь осі і кута повороту перерізу пружної балки. Визначено характер складності знаходження розв'язків і спосіб аналітичної оцінки точності розв'язків основного диференціального рівняння пружної лінії та рівняння кута повороту перерізу балки. Продемонстровано їх прикладне застосування на прикладі розрахунку стріли прогину й максимального кута повороту перерізу балки із заданим навантаженням.

**Ключові слова:** пружна балка; вісь балки; прогин осі; рівняння осі бруса; кут повороту перерізу балки; стріла прогину.

Рис.: 1. Табл.: 1. Бібл.: 5.

**Актуальність теми дослідження.** Розрахунок будівельних конструкцій на міцність і жорсткість відіграє важливу роль у забезпеченні їх надійності в експлуатації. Необхідність розрахунків викликана деформаціями конструкцій під дією зовнішніх сил або температури. Опір матеріалів, теоретична механіка й вища математика є теоретичним підґрунтям для таких розрахунків.

Об'єктами розрахунків слугують тіла основних форм, до яких, зокрема, належать стрижні або бруси – тіла, у яких довжина значно перевищує два інші розміри. Точний розв'язок рівнянь, що описують стан стрижня при його деформації, є запорукою точності розрахунку конструкцій, елементом яких є стрижень. Уміння оцінити точність результатів розрахунків є важливим аспектом їх практичного застосування, зокрема, для перевірки й уточнення норм границь переміщень точок пружної балки.

**Постановка проблеми.** У багатьох випадках розрахунку гнучких деталей необхідно вміти розраховувати їх на міцність і жорсткість. При дослідженні пружної балки при її плоскому вигині розраховується, зокрема, деформація її пружної осі та зміна кута повороту перерізу балки відносно свого початкового стану.

Основою цих розрахунків є точне рівняння зігнутої осі балки (бруса) – диференціальне рівняння, інтегрування якого упускається у класичних навчальних курсах опору матеріалів і теоретичної механіки через певну його складність. Натомість там розглядається основне диференціальне рівняння пружної лінії, яке є наближеним до точного рівняння зігнутої осі балки завдяки спрощенню, що впливає з практичних та експериментальних результатів. Унаслідок цього розв'язки спрощеного рівняння зазвичай є наближеними.

Проте загально прийнято, що при застосуванні наближених методів розрахунків потрібно вміти оцінювати їхню точність, тобто ступінь наближення до точного результату.

Отже, задачею нашого дослідження є отримання точних аналітичних розв'язків точних рівнянь зігнутої осі балки і кута повороту перерізу балки, і як наслідок, отримання аналітичного способу визначення точності розв'язків основного диференціального рівняння пружної лінії, включаючи рівняння кута повороту перерізу балки.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Стан багатьох технічних конструкцій можна описати залежністю положень їх точок у певному просторі, тобто функціями. Функції, що визначають локально стійкий стан конструкції, при збільшенні навантаження на конструкцію змінюються [1]. Оскільки зміни функцій описують відповідними рівняннями, то розв'язок рівнянь, що описують ту чи іншу конструкцію, називають її розрахунком [4].

Практичним розрахункам деталей, що працюють на згинання, присвячено достатньо наукової і навчально-методичної літератури. Виокремлюючи з них оцінку пружної підатливості балки під дією прикладених сил, автори [3] зазначають, що «Для виконання такого розрахунку треба навчитись обчислювати переміщення точок балки під дією будь-яких зовнішніх навантажень».

Ми розглядаємо плоске згинання осі балки, тобто її деформацію в одній площині ( $xOy$ ) із силами, що діють на балку.

У курсах опору матеріалів і технічної механіки (див., наприклад, [2], [3], [5]) наводиться **точне рівняння зігнутої осі балки** (бруса)

$$\frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (1)$$

де  $Ox$  – пряма вісь балки,  $w(x)$  – прогин балки,  $M(x)$  – згинальний момент,  $EJ(x)$  – жорсткість бруса при згині.

Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, «інтегрувати яке, як відомо, досить важко» ([2; 3]) або «інтегрування представляє складнощі» [5]. Тому це рівняння при практичних розрахунках спрощується за рахунок того, що приймається наближення

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \theta \approx 0,$$

«оскільки більшість балок, які застосовуються в будівництві, є досить жорсткими, а їх прогини дуже малі в порівнянні до їх довжини» ([2; 3]).

У результаті точне рівняння замінюють наближеним – рівнянням для малих переміщень:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)},$$

яке називають **основним диференціальним рівнянням пружної лінії балки** (для малих деформацій). Зазначено [3], що за його допомогою можна обчислювати лінійні та кутові переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Оскільки внаслідок малості деформації балок має місце  $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ , то рівняння кута повороту перерізу балки

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx}$$

є також спрощеним.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Проведений аналіз джерел інформації показав, що джерела інформації, безпосередньо призначені для підготовки фахівців машинобудівної галузі, містять неповний матеріал стосовно точних розв'язків диференціальних рівнянь, які описують деформації пружних конструкцій. Про вищезгадані наближені рівняння там зазначено, що вони мають достатній ступінь точності для більшості балок у будівництві. Таким чином, недослідженою частиною описаної проблеми є аналітичне визначення точності розв'язків для будь-яких пружних балок при їх плоскому згинанні.

**Метою статті** є отримання точних розв'язків диференціальних рівнянь – точного рівняння пружної осі балки і точного рівняння кута повороту її перерізу. Визначити характер складності знаходження розв'язків і спосіб аналітичної оцінки точності розв'язків

основного диференціального рівняння пружної лінії і рівняння кута повороту перерізу балки. Це має допомогти більш точно описати механічний стан пружної конструкції і, зокрема, для уникнення її критичних деформацій.

**Виклад основного матеріалу.** Точне рівняння (1) зігнутої осі балки є звичайним нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, яке допускає пониження порядку.

Для пониження порядку згадаємо, що

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \text{ звідки } \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}.$$

З урахуванням того, що

$$\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \left[1 + \operatorname{tg}^2(\theta)\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3\theta},$$

після підстановки зазначених виразів у рівняння (1) отримуємо рівняння

$$\cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ(x)}, \quad (2)$$

яке природно ми назвали **точним рівнянням кута повороту перерізу осі балки**.

Це рівняння з відокремленими змінними. Інтегруючи його

$$\int \cos\theta \, d\theta = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx,$$

отримаємо розв'язок диференціального рівняння (2) у неявному виді

$$\sin\theta = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1.$$

Отже, **розв'язок точного рівняння кута повороту перерізу** має явний вид:

$$\theta(x) = \arcsin \varphi(x), \quad (3)$$

де  $\varphi(x) = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1.$

Якщо інтеграл у цій формулі виражається через елементарні функції, то його арксинус може виявитися елементарною функцією. У випадку її відсутності розв'язок  $\theta(x)$  можна подати нескінченним степеневим рядом

$$\theta(x) = \arcsin \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \varphi^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \varphi^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots,$$

зі значенням  $C_1$ , яке задовольняє початковим умовам. Ряд є збіжним при всіх значеннях  $\varphi$ , менших по модулю за одиницю.

При практичному застосуванні цього ряду наближене значення  $\theta(x)$  береться як сума перших доданків ряду, кількість яких забезпечує задану точність обчислень.

Якщо інтеграл у формулі (3) не виражається через елементарні функції або первісна функція надто складна, то розв'язок, наближений до  $\theta(x)$ , можна отримати при безпосередньому застосуванні до диференціального рівняння (2) методу Ейлера або інших, більш точних, методів розв'язку диференціальних рівнянь.

Для отримання розв'язку  $w(x)$  точного рівняння зігнутої осі балки згадаємо, що

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg}\theta.$$

Звідси маємо

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - (\varphi(x))^2}}$$

є диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

Отже, розв'язок точного рівняння зігнутої осі балки має вид:

$$w(x) = \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - (\varphi(x))^2}} dx + C_2. \tag{4}$$

Якщо інтеграл в цій формулі не виражається через елементарні функції, то аналогічно пошуку кута  $\theta(x)$ , розв'язок  $w(x)$  можна подати нескінченним степеневим рядом:

$$w(x) = \int \left( \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(x)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varphi(x)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi(x)^7 + \dots \right) dx + C_2$$

зі значенням  $C_2$ , яке задовольняє початковим умовам.

Перевага точного розв'язку в тому, що: 1) найбільше значення прогину й кута повороту перерізу балки можна отримати безпосередньо із властивостей функцій, які входять у розв'язок; 2) наближений розв'язок можна отримати із заздалегідь заданою точністю. Покажемо це на прикладі.

**Приклад.** Запишемо точні рівняння зігнутої осі консолі і кута повороту постійного поперечного її перерізу, якщо ця балка навантажена силою  $P$ , зосередженою на її вільному кінці (див. рис. 1). Визначимо також  $\theta_{\max}$  і  $w_{\max}$ . Згинальний момент у перерізі  $x$  будемо обчислювати як наслідок дії зовнішніх сил ліворуч від перерізу

$$M(x) = -Px.$$

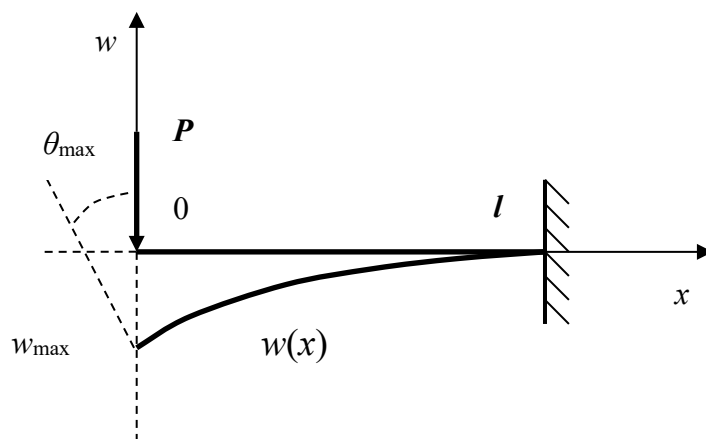


Рис. 1. Вісь консолі, навантажена силою  $P$

Підставивши цей вираз у рівняння (1), маємо точне рівняння зігнутої осі балки

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{-Px}{EJ} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Підстановка  $M(x)$  у рівняння (2) дасть точне рівняння кута повороту її перерізу

$$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{-Px}{EJ}.$$

Його інтегрування дасть рівняння

$$\sin \theta = \varphi(x),$$

у якому

$$\varphi(x) = \int \frac{-Px}{EJ} dx + C_1 = -\frac{Px^2}{2EJ} + C_1,$$

і саме рівняння набуде вигляду

$$\sin \theta = -\frac{Px^2}{2EJ} + C_1.$$

За початкової умови  $\theta = 0$  при  $x = l$  отримаємо значення константи  $C_1$

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Отже, маємо в неявному вигляді розв'язок точного рівняння кута повороту осі цієї консолі

$$\sin \theta = \varphi(x) = \frac{P}{2EJ}(l^2 - x^2),$$

з якого випливає явний вид розв'язку:

$$\theta(x) = \arcsin \varphi(x) = \arcsin \left( \frac{P}{2EJ}(l^2 - x^2) \right).$$

Найбільше значення  $\theta_{\max}$  кута повороту отримаємо, застосовуючи властивості функції арксинус. А саме, строго зростаюча функція приймає найбільше значення при найбільшому значенні аргументу:

$$\max_{0 \leq x \leq l} \left( \frac{P}{2EJ}(l^2 - x^2) \right) = \frac{P}{2EJ}l^2 \quad \text{при } x = 0.$$

Таким чином,

$$\theta_{\max} = \theta(0) = \arcsin \left( \frac{P}{2EJ}l^2 \right).$$

Обчислення цього значення за допомогою сучасної комп'ютерної техніки можна виконати з будь-якою наперед заданою точністю. Ми ж для прикладу обмежимося двома першими членами розкладу:

$$\theta_{\max} = \arcsin \varphi(0) \approx \varphi(0) + \frac{\varphi^3(0)}{2 \cdot 3} = \frac{P}{2EJ}l^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{P}{2EJ}l^2 \right)^3 = \frac{P}{2EJ}l^2 + \frac{P^3}{48E^3J^3}l^6.$$

Розв'язок  $w(x)$  точного рівняння зігнутої осі балки подамо нескінченним степеневим рядом:

$$w(x) = \int \left( \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(x)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \varphi(x)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi(x)^7 + \dots \right) dx + C_2,$$

оскільки інтеграл у формулі (4) не виражається через елементарні функції. Для прикладу розглянемо інтеграл від суми тільки двох перших членів ряду, отримавши наближене значення

$$w(x) \approx \int \left( \varphi(x) + \frac{1}{2} \varphi(x)^3 \right) dx + C_2 = \int \left( \frac{P}{2EJ}(l^2 - x^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{P}{2EJ}(l^2 - x^2) \right)^3 \right) dx + C_2,$$

у якому константу  $C_2$  розраховують із початкової умови  $w = 0$  при  $x = l$ .

Обмежившись членами ряду степеня не вище третього, з урахуванням константи  $C_2$  отримаємо

$$w(x) \approx \frac{Pl^2}{2EJ}(x-l) - \frac{P}{6EJ}(x^3-l^3) + \frac{P^3l^6}{16E^3J^3}(x-l) - \frac{P^3l^4}{16E^3J^3}(x^3-l^3).$$

Максимальний прогин  $w_{\max}$  осі консолі, вочевидь, досягається на її кінці  $x = 0$ :

$$w_{\max} = w(0) \approx -\frac{Pl^3}{2EJ} + \frac{Pl^3}{6EJ} - \frac{P^3l^7}{16E^3J^3} + \frac{P^3l^7}{16E^3J^3} = -\frac{Pl^3}{3EJ},$$

що збігається з відповідними класичними значеннями, розглядуваними в підручниках. Проте, на відміну від них, можна отримати більш точне значення, розглянувши стільки членів ряду, скільки необхідно для забезпечення заданої точності.

Аналогічно, отримані нами значення кута  $\theta_{\max}$  є несуттєво (на перший погляд) більшими за класичні. Чи впливатиме така різниця на прогин консолі при інших окремих її деформаціях, мають показати заплановані нами дослідження.

**Висновки.** У роботі подано отримані нами точні розв’язки диференціальних рівнянь – точного рівняння пружної осі балки й точного рівняння кута повороту її перерізу. Порівняння отриманих результатів з відповідними класичними відображено в таблиці.

Таблиця – Порівняльна таблиця рівнянь і їх розв’язків

Ознака	Рівняння і їх розв’язки в класичних навчальних курсах	Досліджувані рівняння і їх аналітичні розв’язки
Рівняння, що описує вісь балки	Основне диференціальне рівняння пружної лінії балки $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)},$ наближене.	Точне рівняння зігнутої осі балки (бруса) $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}$ $\left[ 1 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{M(x)}{EJ(x)}$
Розв’язок рівняння, що описує вісь балки	$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1x + C_2,$ наближений.	$w(x) = \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - (\varphi(x))^2}} dx + C_2,$ $\varphi(x) = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1,$ отриманий, точний.
Рівняння кута повороту перерізу балки	$\theta(x) = \frac{dw}{dx},$ наближене.	$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ(x)},$ отримане, точне.
Розв’язок рівняння кута повороту перерізу балки	$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1,$ наближений.	$\theta(x) = \arcsin \left( \int \frac{M(x)}{EJ(x)} dx + C_1 \right),$ отриманий, точний.
Оцінка наближення	Впливає з діапазону максимального прогину осі при практичних розрахунках конструкцій	Вказано аналітичний метод оцінки точності наближеного розв’язку.

Визначено характер складності знаходження розв’язків і спосіб аналітичної оцінки точності розв’язків основного диференціального рівняння пружної лінії і рівняння кута повороту перерізу балки. Це має допомогти більш точно описати механічний стан пружної конструкції, зокрема, для уникнення її критичних деформацій.

Практичне значення даного дослідження полягає в економії ресурсів (матеріальних, людських, часових) для забезпечення надійності експлуатації механізмів, що містять пружні балки, оскільки чим більше точних розрахунків покладено в теоретичну модель конструкції, тим надійнішою є її практичне втілення.

**Список використаних джерел**

1. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор ; пер. с англ. – Кн. 2. – Москва : Мир, 1984. – 285 с.
2. Опір матеріалів : конспект лекцій для здобувачів вищ. освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальностей: 131 «Прикладна механіка»; 133 «Галузеве машинобудування»; 274 «Автомобільний транспорт» / уклад.: Л. П. Теліпко. – Кам'янське : ДДТУ, 2019. – 132 с.
3. Писаренко Г. С. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський / ред. Г. С. Писаренко. – 2-ге вид., допов. і перероб. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.
4. Постон Т. Теория катастроф и ее приложение / Т. Постон, И. Стюарт. – Москва : Мир, 1980. – 540 с.
5. Сурін В. М. Технічна механіка : навч. посіб. / В. М. Сурін. – Минск : БДУІР, 2004. – 292 с.

**References**

1. Gilmore, R. (1984). *Prykladnaia teoriia katastrof [Applied theory of catastrophes]*. Mir.
2. Telipko, L.P. (2019). *Opir materialiv [Resistance of materials]*. Kamianske.
3. Pisarenko, G.S., Kvitka, O. L., & Umanskyi, E.S. (2004). *Opir materialiv [Strength of Materials]*. Vyshcha shkola.
4. Poston, T., & Stewart, I. (1980). *Teoriia katastrof i ee prilozheniie [Theory of catastrophes and its application]*. Mir.
5. Surin, V.M. (2004). *Tekhnichna mekhanika [Technical mechanics]*. BDUIR.

Отримано 03.04.23

UDC 539.3

***Olha Bondar<sup>1</sup>, Olexandr Puzyrov<sup>2</sup>***

<sup>1</sup>PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Information Technology  
Robert Elvorti Economics and Technology Institute (Kropyvnytskyi, Ukraine)  
E-mail: [bondarkla@ukr.net](mailto:bondarkla@ukr.net). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5877-5667>

<sup>2</sup>PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Applied mechanics Department  
Robert Elvorti Economics and Technology Institute (Kropyvnytskyi, Ukraine)  
E-mail: [olexandreti@gmail.com](mailto:olexandreti@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2158-3714>

**ON EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF THE AXIS AND ANGLE OF CROSS SECTION OF AN ELASTIC BEAM**

*Calculation of elastic structures for strength and stiffness is important for their safe operation. The need for calculations is caused by structural deformations under the influence of external forces or temperature.*

*The objects of our research are the equation of the axis of an elastic beam during its flat bending, as well as the equation of the angle of rotation of the beam section. These equations are differential. A certain complexity of their solution led to the simplification of equations in classical sources of information. Approximate solutions of these equations are considered there.*

*But when using approximate calculation methods, you need to be able to assess their accuracy, that is, the degree of approximation to the exact result.*

*The goal of our research was to obtain exact solutions. The exact solution of the beam equations is important to avoid its critical deformations.*

*The article presents the exact analytical solutions we obtained for the exact equations of the bent axis of the beam and the angle of rotation of the beam section. The advantage of the exact solution was revealed, in particular, in the fact that the largest value of the deflection and angle of rotation of the beam section can be obtained directly from the properties of the functions that describe the solution.*

*Another advantage of the exact solution was the possibility of obtaining an approximate solution with a predetermined accuracy. In the mentioned classical sources of information, the assessment of accuracy was derived from the range of the maximum deflection of the axis during practical calculations of structures.*

*We have obtained a method of analytical assessment of the accuracy of the obtained solutions. The ability to assess the accuracy of calculation results is an important aspect of their practical application. This is important, in particular, for checking and clarifying the safe range of movements of beam points during its operation.*

*An example of calculating the deflection and angle of rotation of the beam cross-section with a given load on the axis of the beam is shown.*

**Keywords:** elastic beam; beam axis; axis deflection; beam axis equation; angle of rotation of the beam section; deflection arrow.  
Fig.: 1. Table: 1. References: 5.