

## РОЗДІЛ IV. ЕНЕРГЕТИКА, ЕЛЕКТРОТЕХНІКА ТА ЕЛЕКТРОМЕХАНІКА

DOI: 10.25140/2411-5363-2024-3(37)-196-207

УДК 621.314

**Володимир Вікторович Казимир<sup>1</sup>, Анатолій Леонідович Приступа<sup>2</sup>,  
Євгеній Миколайович Ятченко<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних та комп'ютерних систем  
Національний університет «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)

E-mail: [vvkazymyr@gmail.com](mailto:vvkazymyr@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8163-1119>. ResearcherID: Q-2925-2016

<sup>2</sup>кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електричної інженерії та інформаційно-вимірювальних технологій  
Національний університет «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)

Email: [anatoliy.prystupa@stu.cn.ua](mailto:anatoliy.prystupa@stu.cn.ua). ORCID <https://orcid.org/0000-0001-9412-2698>

ResearcherID: F-5507-2014. SCOPUS Author ID: [57190807222](https://orcid.org/57190807222)

<sup>3</sup>аспірант кафедри електричної інженерії та інформаційно-вимірювальних технологій  
Національний університет «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)

E-mail: [yevhenii.yatchenko@gmail.com](mailto:yevhenii.yatchenko@gmail.com). ORCID: 0009-0000-5900-0572

Scopus author ID [59273801700](https://orcid.org/59273801700)

### ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СИСТЕМОЮ

У роботі описано методику отримання закону управління нелінійною динамічною системою шляхом лінеаризації даної системи навколо точки рівноваги. Розписано етапи розробки оптимального керування нелінійною динамічною системою на прикладі перетворювача Кука з використання пакета MathLab: отримання математичної моделі перетворювача; отримання параметрів точки рівноваги нелінійної системи за допомогою пропорційно-інтегрального-диференціального (ПІД) регулятора; лінеаризація математичної моделі навколо точки рівноваги; вирішення задачі квадратичного регулятора та отримання закону управління відстеження для лінеаризованої моделі; керування нелінійною динамічною системою за допомогою закону управління, розробленого для лінеаризованої системи.

**Ключові слова:** моделювання; системи керування; рівняння Гамільтона-Якобі; оптимальне керування; апроксимація; нелінійна система, лінеаризація.

Рис.: 8. Бібл.: 16.

**Актуальність дослідження.** Розробка сучасних технологій, особливо в енергетичній сфері та робототехніці потребує вдосконалення систем керування. Україно-російська війна поставила перед розробниками безпілотних літальних апаратів (БПЛА), наземних, надводних та підводних роботизованих технічних засобів багато задач, пов'язаних з удосконаленням систем їх керування у зв'язку з варіативністю та високою динамікою режимів їх функціонування.

**Постановка проблеми.** Основною проблемою отримання закону управління для нелінійної динамічної системи є те, що система нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує будь-яку нелінійну систему, не має загального розв'язку, а має його лише після деяких спрощень і допущень в системі [1].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Основні підходи до керування нелінійними системами включають такі методи, як:

- робастне керування, яке орієнтоване на створення системи керування для нелінійних електричних систем, де вплив змінних зовнішніх факторів був мінімізований [6-8];
- метод нелінійного прогнозованого керування (Model Predictive Control) використовується для нелінійних систем, де алгоритми прогнозують поведінку системи та коригують дії залежно від очікуваних значень. Цей метод є особливо корисним для складних систем з обмеженнями на змінні стану та вхідні сигнали [9-11];

– адаптивне керування: підходи адаптивного керування дозволяють системі самостійно підлаштовувати параметри в режимі реального часу відповідно до змінних умов роботи [12-13];

– керування на основі штучного інтелекту з використанням глибоких нейронних мереж для контролю та оптимізації поведінки автономних роботизованих технічних засобів у динамічних умовах [14-15].

Попри широке застосування в роботизованих системах зазначені методи є складними в проєктуванні та реалізації, потребують чітко визначених детальних вихідних даних для налаштування.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** Простішим та дешевшим у реалізації методом є метод зворотного зв'язку за лінійними наближеннями, який базується на спробі лінеаризації нелінійної системи в певній точці [16]. Точність керування нелінійних систем значною мірою залежить від повноти врахування нелінійностей при лінеаризації моделі навколо точки рівноваги.

Дана стаття показує приклад отримання закону управління нелінійною динамічною системою шляхом лінеаризації цієї системи навколо точки рівноваги з подальшим вирішенням задачі лінійно-квадратичного регулятора з використанням програмного комплексу MathLab. Рішення отримані за даною методикою можуть бути використані при розробці систем управління БПЛА, наземних, надводних та підводних роботизованих технічних засобів.

**Метою цієї статті** є розробити методику отримання закону управління нелінійною динамічною системою з використанням пакета MathLab.

**Виклад основного матеріалу.** Розглянемо алгоритм розробки системи управління на прикладі перетворювача Кука [2], електрична схема якого представлена на рис. 1.

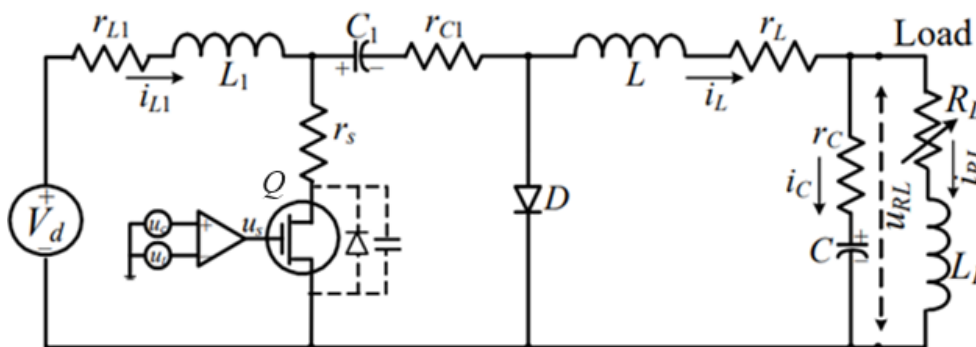


Рис. 1. Схема електрична принципова перетворювача Кука

Відповідно до [3], принцип дії схеми такий: коли ключ  $Q$  закритий, діод  $D$  відкрито і ємність  $C_1$  заряджається струмом, який протікає через індуктивність  $L_1$ . Коли ключ  $Q$  відкритий, струм через індуктивність  $L_1$  росте; діод  $D$  закрито напругою конденсатора  $C_1$ ; конденсатор  $C_1$  розряджається і віддає енергію через контур, сформований  $C_1$ ,  $C$ , навантаженням схеми  $R_L L_L$  та індуктивністю  $L$ . Коли ключ  $Q$  закривається, ємність  $C_1$  заряджається заново, у той час як індуктивність  $L$  віддає енергію навантаженню схеми. Діод і транзистор *перемикається* одночасно. Конденсатор  $C_1$  – ключовий елемент для передачі енергії від джерела  $V_d$  до навантаження.

Щоб отримати математичну модель перетворювача, запишемо систему диференціальних рівнянь Кірхгофа для двох випадків – коли ключ  $Q$  закритий і коли він відкритий.

Використовуючи концепцію усереднення, система результируючих нелінійних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \frac{du_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1}(i_{L1} - i_{L1}d_D + i_L d_D), \\ \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}(i_L - i_{RL}), \\ \frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}[-u_{C1} - (r_{L1} + r_{C1})i_{L1} + u_{C1}d_D + (r_{C1} - r_s)i_{L1}d_D + r_s i_L d_D + V_d], \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}[-u_C - (r_L + r_C)i_L + r_C i_{RL} - u_{C1}d_D + r_s i_{L1}d_D - (r_{C1} + r_s)i_L d_D], \\ \frac{di_{RL}}{dt} = \frac{1}{L_L}[u_C + r_C i_L - (r_C + R_L)i_{RL}]. \end{cases} \quad (1)$$

У цій системі нелінійних диференціальних рівнянь  $d_D = 1$  репрезентує закритий ключ  $Q$ , а  $d_D = 0$  – відповідно відкритий ключ  $Q$ . Для подальшого аналізу схеми задаємо значення її параметрів, які відповідають джерелам живлення БПЛА.

$$r_s = 0,01 \text{ Ом}; r_L = 0,093 \text{ Ом}; r_{L1} = 0,1 \text{ Ом}; r_C = 0,065 \text{ Ом}; r_{C1} = 0,07 \text{ Ом}; C_1 = 10^{-7} \text{ Ф}; \\ C = 10^{-7} \text{ Ф}; L = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}; L_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Гн}; L_L = 0,0001 \text{ Гн}; R_L = 20 \text{ Ом}; V_d = -30 \text{ В}.$$

**Первинний аналіз отриманої нелінійної динамічної системи.**

MATLAB/SIMULINK модель для системи (1) зображена на рис. 2.

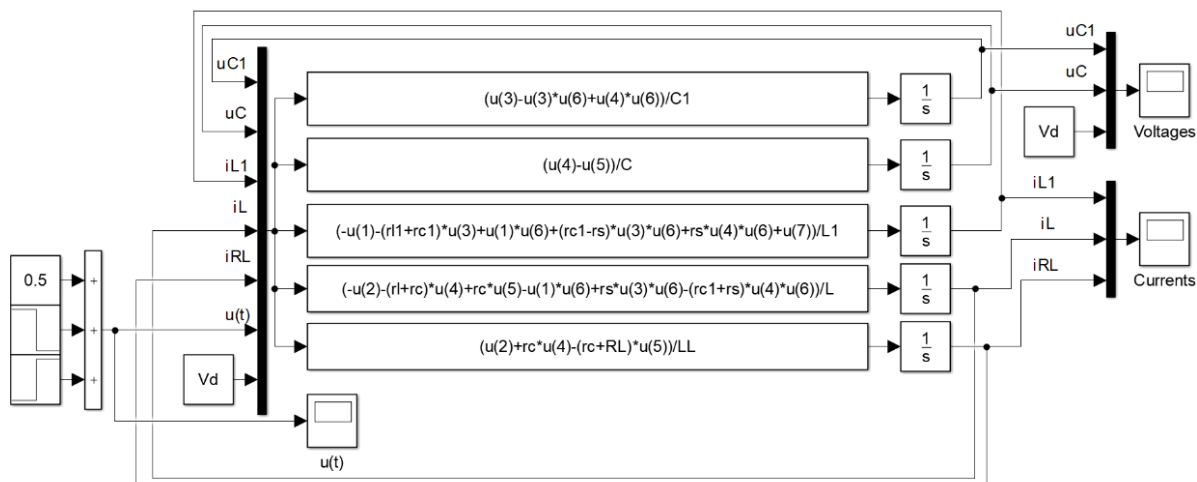


Рис. 2. MATLAB/SIMULINK модель нелінійного перетворювача Кука

Для заданої функції керування

$$u(t) = \begin{cases} 0,5, & 0 \leq t < 0,0033 \text{ sec}; \\ 0,25, & 0,0033 \leq t < 0,0066 \text{ sec}; \\ 0,75, & 0,0066 \leq t < 0,01 \text{ sec}. \end{cases}$$

У результаті моделювання отримано графічні залежності, що ілюструють динаміку струмів та напруг на елементах схеми:

$$u_{C1}(t), u_C(t), V_d(t), [\text{В}] \quad i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t), [\text{А}] \quad u(t), [\text{В.о.}]$$

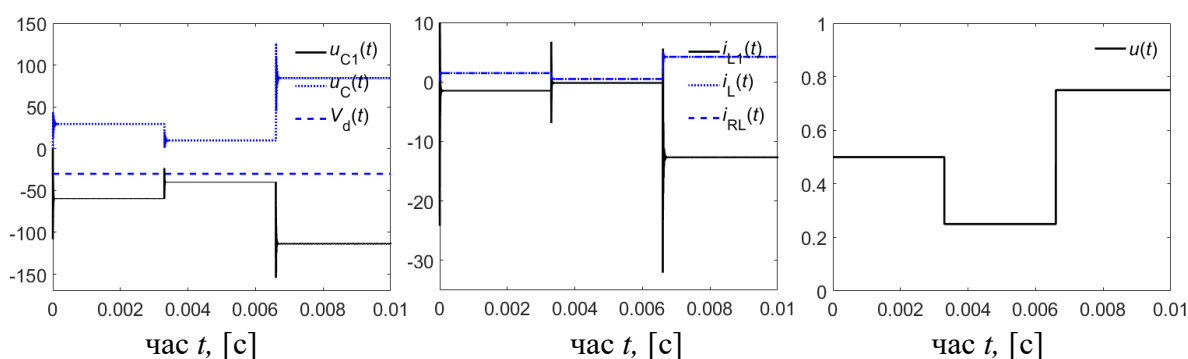


Рис. 3. Зміна напруг  $u_{C1}(t)$ ,  $u_C(t)$  та струмів  $i_{L1}(t)$ ,  $i_L(t)$ ,  $i_{RL}(t)$  на елементах схеми відповідно до функції керування  $u(t)$

Як видно з отриманих графіків, система характеризується значними перерегулюваннями при перехідних процесах, викликаних стрибкоподібною зміною функції керування, що може негативно відобразитись на стійкості системи. Отже, варто розв'язати задачу оптимізації законів керування для цієї системи. Оптимізація може бути здійснена по багатьох параметрах. У цій статті розглянемо випадок оптимізації системи для забезпечення стабілізації напруги. При цьому розглянемо один із найбільш популярних засобів – використання ПД регулятора.

**Лінеаризація моделі навколо точки рівноваги.**

Для розробки оптимального алгоритму управління проведемо лінеаризацію нашої нелінійної системи. Лінеаризація — це процес апроксимації нелінійної системи та отримання аналогічної лінійної системи, яка поводить себе так само, як первинна нелінійна система навколо певної робочої точки, зазвичай точки рівноваги. Одним із методів, який використовується для лінеаризації нелінійних динамічних систем, є метод Якобі.

Спершу отримаємо значення напруг, струмів та функції керування для точки рівноваги, яка відповідає стану системи, коли всі перехідні процеси у схемі вже завершені.

Представимо систему нелінійних диференційних рівнянь (1), яка описує досліджуваній перетворювач, у матричній формі. Матричне представлення нелінійної системи дозволить нам використати функцію jacobian() математичного пакета MATLAB для отримання для отримання лінеаризованої системи навколо точки рівноваги.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_{C1}(t) \\ \dot{u}_C(t) \\ \dot{i}_{L1}(t) \\ \dot{i}_L(t) \\ \dot{i}_{RL}(t) \end{bmatrix} = A \cdot x + B \cdot u + G[x, u] + V, \tag{2}$$

- де  $A$  і  $B$  – матриці лінійної складової системи;
- $G$  – матриця нелінійної складової системи;
- $V$  – матриця постійної складової системи;
- $u$  – закон управління системою;
- $x$  – вектор стану нелінійної динамічної системи.

Із системи рівнянь (1), ми можемо отримати матриці  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $V$  та  $x$ , які для досліджуваної системи мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{-(r_{L1}+r_{C1})}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{-(r_L+r_C)}{L} & \frac{r_C}{L} \\ 0 & \frac{1}{L_L} & 0 & \frac{r_C}{L_L} & \frac{-(r_C+R_L)}{L_L} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G[x, u] = \begin{bmatrix} \frac{-i_{L1}+i_L}{C_1} \\ 0 \\ \frac{u_{C1}+(r_{C1}-r_s)*i_{L1}+r_s*i_L}{L_1} \\ \frac{-u_{C1}+r_s*i_{L1}-(r_{C1}+r_s)*i_L}{L} \\ 0 \end{bmatrix} * u; \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} Vd; \quad x = \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_C \\ i_{L1} \\ i_L \\ i_{RL} \end{bmatrix},$$

де  $C_1$  та  $C$  – значення ємностей конденсаторів схеми рис. 1;

$L_1, L$  та  $L_L$  – значення індуктивностей;

$r_{L1}, r_{C1}, r_L, R_L, r_s$  – еквівалентні значення активних опорів елементів схеми рис. 1;

$u_{C1}, u_C, i_{L1}, i_L, i_{RL}$  – функції, що описують динаміку напруг і струмів нелінійної системи, що лінеаризується.

Маючи нелінійну динамічну систему е вигляді системи нелінійних диференційних рівнянь (1), та її запис в матричному вигляді, отримаємо лінеаризовану систему за допомогою часткових похідних Якобі [4] використовуючи вбудовану в MATLAB функцію `jacobian()`.

Представимо MATLAB код отримання матриць Якобі за допомогу вбудованої MATLAB функції – `jacobian()`:

```
syms uc1 uc il1 il irl dd;
syms rs rl rL1 rc rc1 C C1 L L1;
syms RL LL Vd
A = [0, 0, 1/C1, 0, 0;
     0, 0, 0, 1/C, -1/C;
     -1/L1, 0, -(rL1+rc1)/L1, 0, 0;
     0, -1/L, 0, -(rL+rc)/L, rc/L;
     0, 1/LL, 0, rc/LL, -(rc+RL)/LL;];
B = [0;0;0;0;0];
G = [(-il1+il)/C1;
     0;
     (uc1+(rc1-rs)*il1+rs*il)/L1;
     (-uc1+rs*il1-(rc1+rs)*il)/L;
     0;] * dd;
V = [0;0;Vd/L1;0;0];
```

```
states = [uc1 uc il1 il irl];
f = A * [uc1; uc; il1; il; irl] + B * dd + G + V;
A_jacobian = jacobian(f, states);
B_jacobian = jacobian(f, dd);
```

Представимо MATLAB код отримання матриць Якобі за допомогу отримання часткових похідних:

```
syms uc1 uc il1 il irl dd;
syms rs rl rl1 rc rc1 C C1 L L1;
syms RL LL Vd
syms x1 x2 x3 x4 x5;
syms dx1 dx2 dx3 dx4 dx5;
%% declare matrixes
A = [0, 0, 1/C1, 0, 0;
     0, 0, 0, 1/C, -1/C;
     -1/L1, 0, -(rl1+rc1)/L1, 0, 0;
     0, -1/L, 0, -(rl+rc)/L, rc/L;
     0, 1/LL, 0, rc/LL, -(rc+RL)/LL];
B = [0;0;0;0;0];
G = [(-il1+il)/C1;
     0;
     (uc1+(rc1-rs)*il1+rs*il)/L1;
     (-uc1+rs*il1-(rc1+rs)*il)/L;
     0] * dd;
V = [0;0;Vd/L1;0;0];
%% Go back to equations from matrixes.
f = A * [uc1; uc; il1; il; irl] + B * dd + G + V;
x1=uc1; x2=uc; x3=il1; x4=il; x5=irl;
dx1=subs(f(1)); dx2=subs(f(2)); dx3=subs(f(3)); dx4=subs(f(4)); dx5=subs(f(5));
%% Calculate partial derivatives
Ja=[diff(dx1,x1) diff(dx1, x2) diff(dx1, x3) diff(dx1, x4) diff(dx1, x5);
    diff(dx2,x1) diff(dx2, x2) diff(dx2, x3) diff(dx2, x4) diff(dx2, x5);
    diff(dx3,x1) diff(dx3, x2) diff(dx3, x3) diff(dx3, x4) diff(dx3, x5);
    diff(dx4,x1) diff(dx4, x2) diff(dx4, x3) diff(dx4, x4) diff(dx4, x5);
    diff(dx5,x1) diff(dx5, x2) diff(dx5, x3) diff(dx5, x4) diff(dx5, x5)];
Jb = [diff(dx1,dd); diff(dx2,dd); diff(dx3,dd); diff(dx4,dd); diff(dx5,dd)];
```

Результати розрахунку матриць Якобі отриманої лінійної системи представлено нижче

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-dd}{C_1} & \frac{dd}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{dd-1}{L_1} & 0 & \frac{dd \cdot (r_{c1} - r_s) - (r_{l1} + r_{c1})}{L_1} & \frac{rs \cdot dd}{L_1} & 0 \\ -\frac{dd}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{r_s \cdot dd}{L} & \frac{-(r_L + r_C) - dd \cdot (r_{c1} + r_s)}{L} & \frac{r_C}{L} \\ 0 & \frac{1}{L_L} & 0 & \frac{r_C}{L_L} & \frac{-(r_C + R_L)}{L_L} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$B_J = \begin{bmatrix} \frac{i_L - i_{L1}}{C_1} \\ 0 \\ \frac{u_{C1} + i_L \cdot r_s + i_{L1} \cdot (r_{C1} - r_s)}{L_1} \\ \frac{-u_{C1-iL} \cdot (r_{C1} + r_s) + i_{L1} \cdot r_s}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

де  $u_{C1}, u_C, i_{L1}, i_L, i_{RL}$  та  $dd$  – значення режимних параметрів, які описують точку рівноваги нелінійної системи, навколо якої було виконано лінеаризацію.

Враховуючи (3) і (4) математична модель лінеаризованої системи матиме вигляд

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} u_{C1}(t) \\ \dot{u}_C(t) \\ i_{L1}(t) \\ \dot{i}_L(t) \\ i_{RL}(t) \end{bmatrix} = A_J \cdot x + B_J \cdot u, \tag{5}$$

де  $A_J$  та  $B_J$  – відповідні матриці коефіцієнтів Якобі;

$x$  – вектор стану лінійної динамічної системи;

$u$  – закон управління системою.

**Моделювання лінеаризованої системи.** На основі системи лінійних диференціальних рівнянь (5), будемо MATLAB SIMULINK модель та проводимо її моделювання.

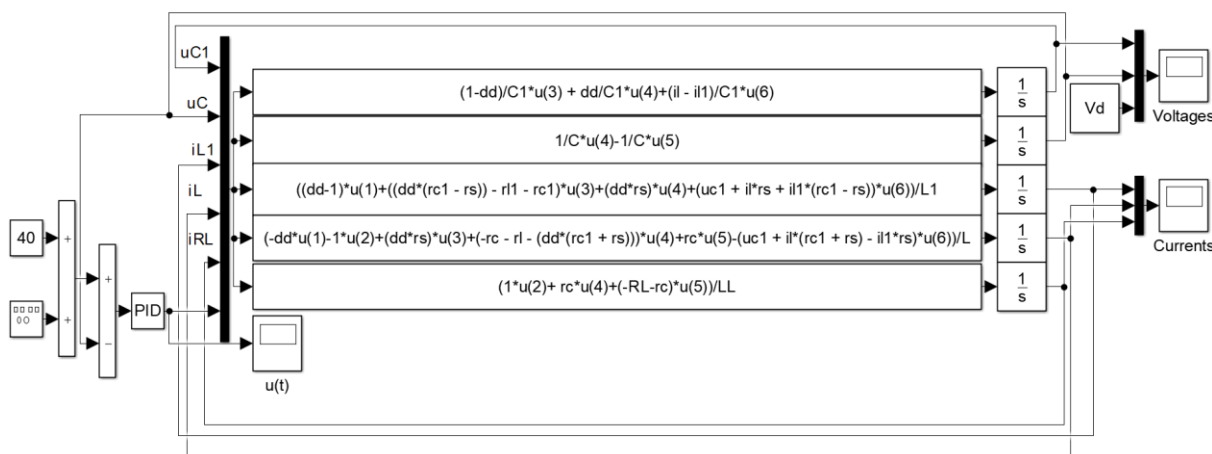


Рис. 4. MATLAB/SIMULINK модель лінеаризованого перетворювача Кука з ПІД регулятором

Результати моделювання лінійної системи наведено на рис. 5.

$$u_{C1}(t), u_C(t), V_d(t), [B] \quad i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t), [A] \quad u(t), [B.O.]$$

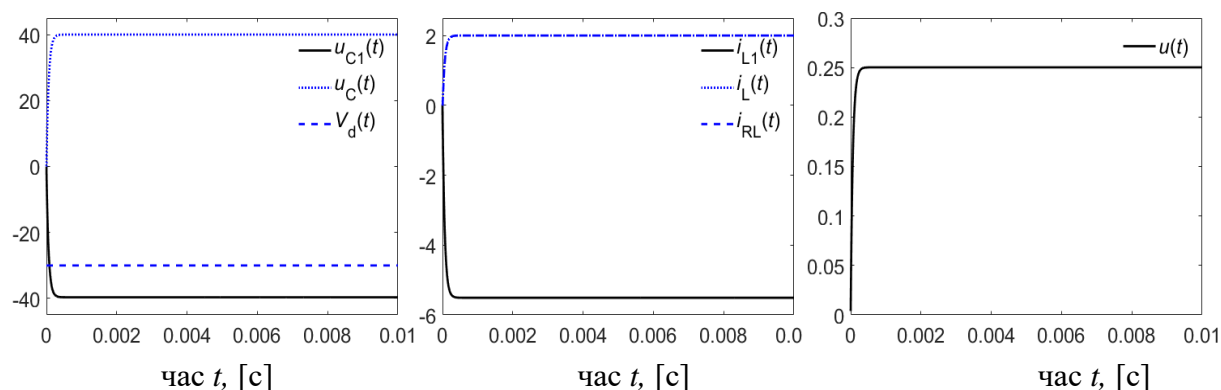


Рис. 5. Зміна напруг  $u_{C1}(t), u_C(t)$ , струмів  $i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t)$  і функції керування  $u(t)$  лінеаризованого перетворювача Кука, керованого ПІД регулятором

З аналізу результатів моделювання видно, що напруга на виході перетворювача стабілізована на рівні 40 В, пульсації відсутні, що свідчить про досягнення цілей щодо задачі керування.

**Синтез закону керування за допомогою лінійно-квадратичного регулятора.**

Задача синтезу лінійно-квадратичного регулятора (ЛКР) є фундаментальною концепцією в теорії оптимального керування для лінійних систем. Він призначений для обчислення оптимальних входів керування (синтезу закону управління) для досягнення системою бажаного стану з мінімізацією функції витрат. У нашому випадку розглянемо розширену систему (5), задавши як контрольовану функцію  $u_C(t)$  – напругу на конденсаторі С (рис. 1).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_j x + B_j u \\ y(t) = Hx \end{cases}, \tag{6}$$

де перший вираз – система (5),

другий вираз описує, який саме вихід системи (5) є важливим для розглянутого перетворювача.

Оскільки при синтезі закону керування нас у цьому випадку цікавить тільки напруга  $u_C(t)$ , то матриця  $H$  матиме вигляд

$$H=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Відповідно до [5], щоб аналітично синтезувати закон управління відстеження, необхідно врахувати динаміки помилки стану ( $\dot{x}_e(t)$ ) та відстеження ( $\dot{e}(t)$ ).

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) &= r - y = r - Hx = r - u_C; \\ \dot{e}(t) &= -e + \dot{r} - \dot{y} = -e + \dot{r} - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} i_{RL}; \end{aligned}$$

Розширимо лінійну модель (5) отриманими рівняннями опису помилок

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_e(t) \\ e(t) \end{bmatrix} = A \cdot x + A_r \cdot r + B \cdot u, \tag{7}$$

де  $A, Ar, r$  та  $B$  – матриці коефіцієнтів рівняння Якобі, які наведено нижче;  $x$  – вектор стану лінійної динамічної системи, який також описує помилки стану та відстеження;  $u$  – закон управління системою.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-dd}{C_1} & \frac{dd}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & 0 \\ \frac{dd-1}{L_1} & 0 & \frac{dd*(r_{C1}-r_s)-(r_{L1}+r_{C1})}{L_1} & \frac{r_s*dd}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{dd}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{r_s*dd}{L} & \frac{-(r_L+r_C)-dd*(r_{C1}+r_s)}{L} & \frac{r_C}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_L} & 0 & \frac{r_C}{L_L} & \frac{-(r_C+R_L)}{L_L} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_C \\ i_{L1} \\ i_L \\ i_{RL} \\ x_e \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{i_L-i_{L1}}{C_1} \\ 0 \\ \frac{u_{C1}+i_L*r_s+i_{L1}*(r_{C1}-r_s)}{L_1} \\ \frac{-u_{C1}-i_L*(r_{C1}+r_s)+i_{L1}*r_s}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Рівняння (13) описує лінеаризовану модель перетворювача Кука, яка враховує помилки стану та відстеження.

Маючи описану лінеаризовану динамічну систему, можемо скористатись відомим результатом синтезу лінійно-квадратичного регулятора:

$$u = -G^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x},$$

де  $G$  – матриця коефіцієнтів, яка враховує вагу керуючого сигналу;

$K$  – рішення алгебраїчного рівняння Ріккати.

$$Q + \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{K} \mathbf{B} G^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} = 0,$$

де  $Q$  – діагональна матриця, що враховує вагу кожної змінної простору стану.

Рішення рівняння Ріккати легко знайти за допомогою функції `lqr()` математичного пакета MATLAB.

Ілюстрація результатів синтезу закону керування для досліджуваної схеми представлено на рис. 6-8.

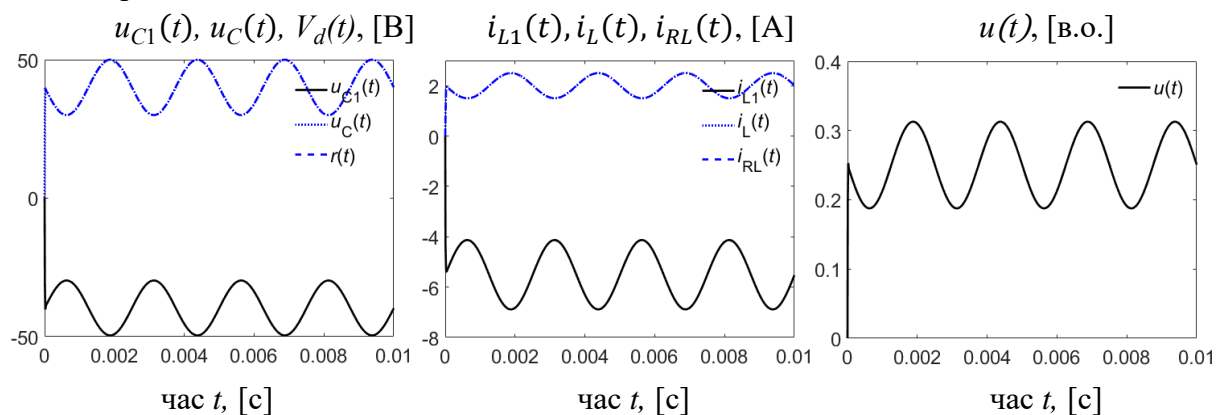


Рис. 6. Зміна напруг  $u_{C1}(t), u_C(t)$ , струмів  $i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t)$  на елементах схеми відповідно до функції керування  $u(t)$ , що має синусоїдальну форму.

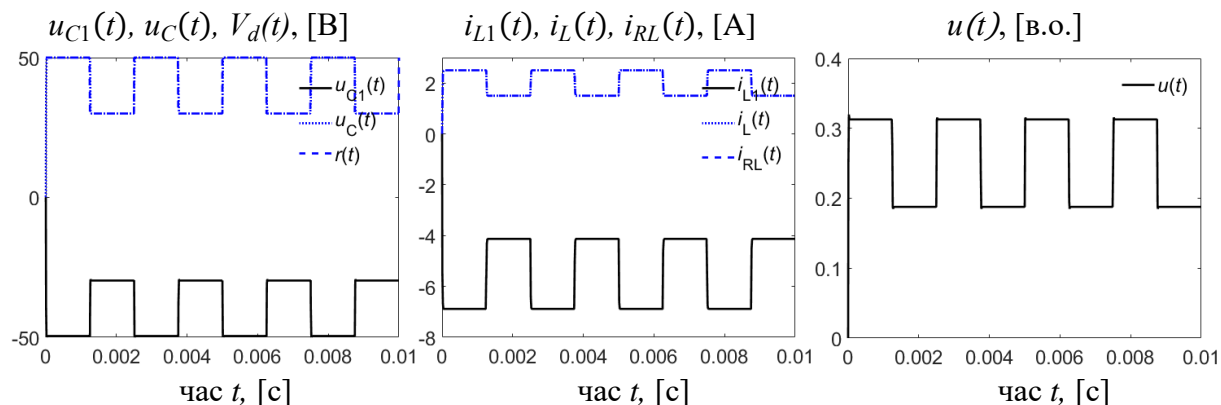


Рис. 7. Зміна напруг  $u_{C1}(t), u_C(t)$ , струмів  $i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t)$  на елементах схеми відповідно до функції керування  $u(t)$ , що має П-подібну форму

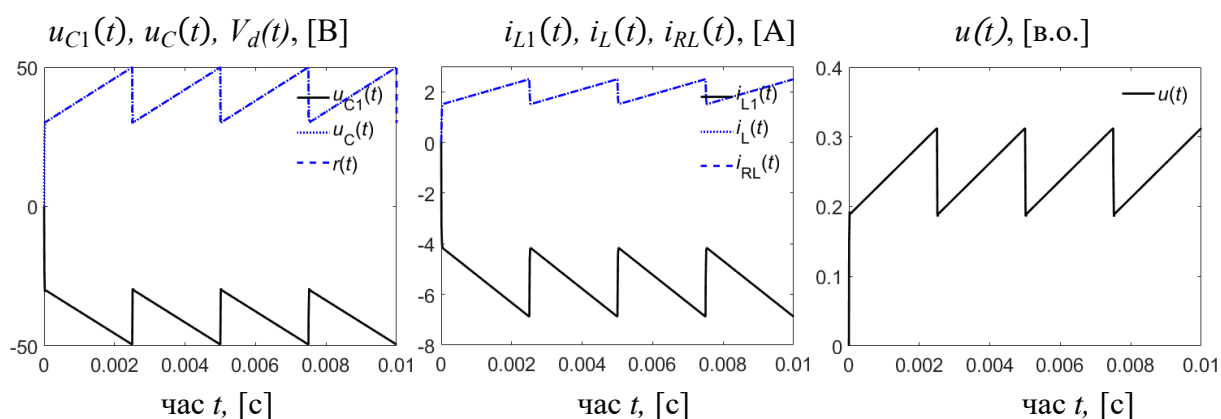


Рис. 8. Зміна напруг  $u_{C1}(t), u_C(t)$ , струмів  $i_{L1}(t), i_L(t), i_{RL}(t)$  на елементах схеми відповідно до функції керування  $u(t)$ , що має пилкоподібну форму.

Як видно з отриманих залежностей, синтезований за описаною методикою закон керування є ефективним для сигналів різної форми та динаміки, що дозволяє його використовувати в складних технічних системах, як то БПЛА, наземних, надводних та підводних роботизованих технічних засобів.

**Висновки.** У цій роботі представлено алгоритм формування закону керування нелінійних динамічних систем з використанням пакета MATLAB. На прикладі напівпровідникового перетворювача Кука показано реалізацію лінеаризації нелінійної моделі; вирішення задачі синтезу лінійно-квадратичного регулятора лінеаризованої моделі та застосування такого регулятора для управління вихідною нелінійною динамічною системою. Отримані результати отримано в рамках виконання науково-дослідної роботи 0123U101819 «Мультиагентна система захисту об'єктів критичної інфраструктури на основі рою мультикоптерних дронів» та можуть бути використані при розробці систем керування БПЛА, наземних, надводних та підводних роботизованих технічних засобів.

### Список використаних джерел

1. Lewis, F. L. Optimal Control / F. L. Lewis, D. Vrabie, V. L. Syrmos. – 3rd ed.–John Wiley & Sons, 2012. – 540 p.
2. Mohan, N. Power Electronics: Converters, Applications, and Design / N. Mohan, T. M. Undeland, and W. P. Robbins. – 3rd ed. – New York, NY, USA: Wiley, 2002. – Pp. 184-185.
3. Lyshevski, S. E. Mechatronics Part 2: Actuators, Sensors and Electronics" EEEE-583/683, Rochester Institute of Technology, Rochester, USA, April, 2023.

4. Panfilov A. Matrices, Linearization, and the Jacobi matrix [Electronic resource] / Alexander Panfilov, Kirsten H.W.J. ten Tusscher, Rob J. de Boer // Theoretical Biology. – Utrecht University, 2024. – Accessed mode: <https://tbb.bio.uu.nl/rdb/books/math.pdf>.
5. Lyshevski, S. E. Optimal Control Part 3-2: Control and Optimization of Nonlinear Dynamic Systems" EEEE-765, Rochester Institute of Technology, Rochester, USA, April, 2023.
6. Huang, X. Robust safety-critical control of nonlinear systems with small perturbations / X. Huang, L. Long // Nonlinear Dyn. – 2024. – № 23. – Pp. 21291-21307. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10151-7>.
7. Isidori, A. Robust Autonomous Guidance: An Internal Model Approach / A. Isidori, L. Marconi, A. Serrani. – Springer Science & Business Media; 2003.
8. Abdelhamid, B. Robust Fuzzy Adaptive Fault-Tolerant Control for a Class of Second-Order Nonlinear Systems / B. Abdelhamid, C. Mohamed // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. – 2024 – Vol. 38, № 10. DOI: <https://doi.org/10.1002/acs.3916>.
9. Camacho, E. F. Model Predictive Control / E. F. Camacho. – New York, USA: Springer, 2007.
10. Model predictive control for autonomous ground vehicles: a review / S. Yu, M. Hirche, Y. Huang, H. Chen, F. Allgöwer // Autonomous Intelligent Systems. – 2021. – Vol. 1, № 4. DOI: [10.1007/s43684-021-00005-z](https://doi.org/10.1007/s43684-021-00005-z).
11. Hybrid adaptive control for aerial manipulation / M. Orsag, C. Korpela, S. Bogdan, P. Oh // J. Intell. Robot. Syst. – 2014. – Vol. 73. – Pp. 693–707.
12. Park, C. Adaptive Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Control for Aerial Manipulators / C. Park, A. Ramirez-Serrano, M Bisheban // Aerospace. – 2024. – № 11. – Pp. 671. DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace11080671>.
13. Lee, H. Estimation, control, and planning for autonomous aerial transportation / H. Lee, H. J. Kim, // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2016. – № 64. – Pp. 3369–3379. DOI: [10.1109/TIE.2016.2598321](https://doi.org/10.1109/TIE.2016.2598321).
14. Russell, S. Artificial Intelligence: A Modern Approach / S. Russell, P Norvig. – Third Edition. – Pearson Education, Limited, 2016. – 1132 p.
15. Gladun, A. Ya. Ontology-Oriented Multy-Agent System for Decentralized Control of UAV's Group / A. Ya. Gladun, K. O. Khala// Cybernetics and Computer Engineering. – 2024. – № 2(216). – Pp. 41-69. DOI: [10.15407/kvt216.02.041](https://doi.org/10.15407/kvt216.02.041).
16. Xingmin, WEI. Control and Stabilization of Chaotic System Based on Linear Feedback Control Method / WEI Xingmin, LI Dekui // Wuhan University Journal of Natural Sciences. – 2024. – № 29(3). – Pp. 284-292. DOI: <https://doi.org/10.1051/wujns/2024293284>.

### References

1. Lewis, F.L., Vrabie, D., Syrmos, V.L. (2012). *Optimal Control*. (3rd ed.). John Wiley & Sons.
2. Mohan, N., Undeland, T. M., Robbins, W. P. (2002). *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*. 3rd ed. NY, USA: Wiley.
3. Lyshevski, S.E. (April, 2023). Mechatronics Part 2: Actuators, Sensors and Electronics. EEEE-583/683. Rochester Institute of Technology, Rochester, USA.
4. Panfilov, A. Matrices, Kirsten, H.W.J. ten Tusscher, Rob, J. de Boer. (n.d.). *Linearization, and the Jacobi matrix*. Utrecht University. <https://tbb.bio.uu.nl/rdb/books/math.pdf>.
5. Lyshevski, S.E. (April, 2023). Optimal Control Part 3-2: Control and Optimization of Nonlinear Dynamic Systems. EEEE-765. Rochester Institute of Technology, Rochester, USA.
6. Huang, X., Long, L. (2024). Robust safety-critical control of nonlinear systems with small perturbations. *Nonlinear Dyn*. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10151-7>.
7. Isidori, A, Marconi, L, Serrani, A. (2003). *Robust Autonomous Guidance: An Internal Model Approach*. Springer Science & Business Media.
8. Abdelhamid, B., Mohamed, C. (2024). Robust Fuzzy Adaptive Fault-Tolerant Control for a Class of Second-Order Nonlinear Systems. *Int J Adapt Control Signal Process*. <https://doi.org/10.1002/acs.3916>.
9. Camacho, E.F. (2007). *Model Predictive Control*. New York, USA: Springer.
10. Yu, S., Hirche, M., Huang, Y., Chen, H., Allgöwer, F. (2021). Model Predictive Control for Autonomous Ground Vehicles: A Review. *Autonomous Intelligent Systems*, 1(1), doi:10.1007/s43684-021-00005-z.

11. Orsag, M., Korpela, C., Bogdan, S., Oh, P. (2014). Hybrid adaptive control for aerial manipulation. *J. Intell. Robot. Syst.*, 73, 693–707.
12. Park, C., Ramirez-Serrano, A., Bisheban, M. (2024). Adaptive Incremental Nonlinear Dynamic Inversion Control for Aerial Manipulators. *Aerospace*, 11, 671. <https://doi.org/10.3390/aerospace11080671>.
13. Lee, H., Kim, H.J. (2016). Estimation, control, and planning for autonomous aerial transportation. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 64, 3369–3379.
14. Russell, S., Norvig, P. (2016). Artificial Intelligence: A Modern Approach. Third Edition. (Pearson Education, Limited).
15. Gladun, A. Ya., Khala, K.O. (2024). Ontology-Oriented Multy-Agent System for Decentralized Control of UAV's Group. *Kibernetika i vyčislitel'naâ tehnika*, 216, 41-69. DOI: 10.15407/kvt216.02.041.
16. WEI Xingmin, LI Dekui. (2024). Control and Stabilization of Chaotic System Based on Linear Feedback Control Method[J]. *Wuhan Univ J of Nat Sci*, 29(3), 284-292.

Отримано 10.09.2024

UDC 621.32

**Volodymyr Kazymyr<sup>1</sup>, Anatoliy Prystupa<sup>2</sup>, Yevhenii Yatchenko<sup>3</sup>**

<sup>3</sup>Doctor of Sciences, Professor, Professor of the Department of Information and Computer Systems  
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

**E-mail:** [vykazymyr@gmail.com](mailto:vykazymyr@gmail.com). **ORCHID:** <https://orcid.org/0000-0001-8163-1119>. **ResearcherID:** [Q-2925-2016](https://orcid.org/Q-2925-2016)

<sup>1</sup>PhD in Technical Sciences, Associate Professor,  
Associate Professor of the Electrical Engineering and Information and Measurement Technologies Department  
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

**Email:** [anatoliy.prystupa@stu.cn.ua](mailto:anatoliy.prystupa@stu.cn.ua). **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9412-2698>

**ResearcherID:** [F-5507-2014](https://orcid.org/F-5507-2014). **SCOPUS Author ID:** [57190807222](https://orcid.org/57190807222)

<sup>2</sup>PhD Student at the Electrical Engineering and Information and Measurement Technologies Department  
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

**E-mail:** [yevhenii.yatchenko@gmail.com](mailto:yevhenii.yatchenko@gmail.com). **ORCID:** [0009-0000-5900-0572](https://orcid.org/0009-0000-5900-0572)

**Scopus author ID** [59273801700](https://orcid.org/59273801700)

## OPTIMAL CONTROL OF A NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM

The work describes the method of obtaining the control law of a nonlinear dynamic system by linearizing this system around the equilibrium point. The stages of development of optimal control of a nonlinear dynamic system using the example of a Cook converter using the MathLab package are outlined: obtaining a mathematical model of the converter; obtaining parameters of the equilibrium point of a nonlinear system using a proportional-integral-differential (PID) regulator; linearization of the mathematical model around the equilibrium point; solving the quadratic controller problem and obtaining the tracking control law for the linearized model; control of a nonlinear dynamic system using a control law developed for a linearized system.

The results were obtained within the framework of the research work 0123U101819 'Multi-agent system for the protection of critical infrastructure facilities based on a swarm of multi-copter drones' and can be used in the development of control systems for UAVs, ground, surface and underwater robotic vehicles

**Keywords:** Modelling; control systems; Hamilton-Jacobi equation; optimal control; approximation; nonlinear system, linearisation.

*Fig.: 8. References: 16.*