

DOI: [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-2\(40\)-87-96](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2025-2(40)-87-96)

УДК 621.914(075.8)

Валерій Іванович Солодкийкандидат технічних наук, доцент кафедри конструювання машин
Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (Київ, Україна)

E-mail: solodkiyv@ukr.net, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2595-5436>, ResearcherID: [MZQ-5574-2025](https://orcid.org/MZQ-5574-2025)**ТРИАНГУЛЯЦІЯ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХОНЬ
У ПРОЦЕСАХ ФОРМОУТВОРЕННЯ**

На основі диференціальної теорії поверхонь представлено метод триангуляції гвинтових поверхонь просторовими елементами циліндричної форми у процесах формоутворення. Використання просторових елементів замість традиційних плоских типу трикутника або багатогранника дозволяє безперервно визначати диференціальні характеристики локальної геометрії триангульованої фасонної гвинтової поверхні. Наведено математичні залежності визначення параметрів кривини, кручення, положення площини дотичної до фасонної поверхні деталі та напрямку нормалі необхідних для проектування інструменту утворюючого фасонні гвинтові поверхні.

Ключові слова: триангуляція; гвинтові поверхні; формоутворення.

Рис.: 4. Бібл.: 11.

Актуальність теми дослідження. У тривимірному просторі триангуляцію поверхні можна інтерпретувати, як заміну відомої фасонної поверхні сукупністю елементарних геометричних фігур – кінцевих триангуляційних елементів.

Триангуляцію складних фасонних поверхонь широко використовують, як складову частину методу кінцевих елементів при дослідженні напруженого стану окремих частин різального інструменту або пошуку спряжених поверхонь при вирішенні задач профілювання, зокрема пошуку початкової інструментальної поверхні та визначення форми фасонних різальних інструментів.

У виробничих процесах триангуляцію поверхонь застосовують під час формоутворення деталей на верстатах із числовим програмним керуванням.

Постановка проблеми. Основною проблемою при розв'язанні задач формоутворення та обробки фасонних поверхонь із застосуванням триангуляції є проблема адекватного відображення локальних диференціальних характеристик поверхні, а саме: положення площини дотичної до поверхні деталі, напрямку нормалі, кривина, кручення. Ці параметри необхідні для визначення профілю різальних кромок інструмента та оптимізації траєкторій його руху.

Для поверхні не підданої триангуляції ці параметри змінюються плавно і безперервно у всьому досліджуваному просторі. Водночас триангульована поверхня, що представлена сукупністю плоских триангуляційних елементів, має лише дискретні значення вказаних параметрів локальної геометрії поверхні, однакових для всього триангуляційного елемента.

Це вносить значні похибки у результати дослідження умов формоутворення. Крім того, такі поняття, як кривина та кручення щодо плоского елемента не зовсім коректні.

Теоретично вказану проблему можна вирішити, збільшивши кількість елементів, на які розбита триангульована поверхня. Проте розбивка поверхні на велику кількість елементів значно ускладнює розрахунки і зводить нанівець практичні переваги триангуляції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Триангуляцію, як складову частину методу кінцевих елементів, широко застосовують при вирішенні задач опору матеріалів і теорії пружності оболонок [1; 2].

Одночасно, триангуляцію поверхонь та метод кінцевих елементів, які добре розроблені в механіці стрижневих систем стосовно розрахунку навантажень і деформацій складних просторових деталей [3; 4], використовують при проектуванні сучасного збірного різального інструменту. У цьому випадку об'ємну поверхню деталі представляють суку-

пністю плоских елементарних геометричних фігур, зазвичай трикутників або паралелограмів [5; 6; 7]. Таке представлення поверхні спрощує задачі пошуку спряжених поверхонь при конструюванні різальних інструментів.

Виділення недослідженої частини загальної проблеми. Проведений аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що у більшості випадків триангуляція фасонної поверхні здійснюється простими плоскими фігурами, здебільшого трикутниками або паралелограмами.

Разом з тим недостатньо розроблені методи триангуляції складних фасонних поверхонь об'ємними елементами, які мають безперервні диференціальні характеристики досліджуваної поверхні.

Метою статті є розробка методу триангуляції гвинтової поверхні за допомогою гвинтових траєкторій, що дає можливість перейти від дискретного представлення диференціальних характеристик гвинтової поверхні до безперервного та сформулювати математичні залежності, які безперервно описують характеристики поверхні у локальному просторі її існування.

Виклад основного матеріалу. Мінімальним геометричним елементом, сукупністю яких може бути задана поверхня довільної форми є точка. Однак такі поняття як нормаль, кривина й дотична, які характеризують локальну геометрію поверхні, не можуть бути застосовні до точки.

Одним зі способів, який дозволяє перейти від дискретного представлення параметрів локальної геометрії триангульованої поверхні до безперервного, може бути використання поняття гвинтові траєкторії, як межі триангуляційних елементів.

Гвинтову поверхню можна розглядати, як сукупність гвинтових траєкторій точок, які належать її довільному перерізу. У цьому випадку, використовуючи гвинтові траєкторії, як межі триангуляційних елементів, можна перейти від дискретних значень локальних диференціальних характеристик поверхні до безперервних уздовж кордонів цих елементів. Одночасно це дозволяє використовувати замість плоского кінцевого елемента частину циліндричної поверхні постійного радіуса, який має велику гомеоморфність щодо гвинтової поверхні.

Отже, поверхню можна представити, як сукупність нескінченної кількості ліній не ідентичних одна одній. Проте більш доцільним є утворення регулярної сукупності ліній, які мають однакові геометричні ознаки. У такому разі гвинтову поверхню доцільно розглядати, як сукупність гвинтових траєкторій точок, що мають гвинтовий рух вздовж осі гвинтової поверхні.

Не дивлячись те, що кожна з цих сукупностей утворена різними за формою лініями, всередині кожної сукупності вони підпорядковані загальним умовам. Важливим є те, що ці лінії можна розглядати, як траєкторії точок, які рухаються у просторі за законом єдиним для всіх точок. Це дозволяє описати одним математичним законом (математичною залежністю) всю фасонну гвинтову поверхню.

З погляду формоутворення поверхонь доцільно використовувати такі траєкторії, які певною мірою характеризують форму всієї поверхні й водночас є досить простими кривими. Щодо гвинтових поверхонь, такими траєкторіями можуть бути гвинтові траєкторії точок, що належать її торцевому перерізу. Вибір гвинтових траєкторій має кілька переваг перед лініями іншого типу. Розглянемо їх докладніше.

З погляду процесу формоутворення гвинтової поверхні на верстаті, гвинтова траєкторія має ту перевагу, що майже завжди збігається з рухом інструменту відносно деталі, а її форма досить повно відображає основні характеристики гвинтової поверхні. Зокрема, її крок, напрям дотичної, кут нахилу твірної, гвинтовий параметр поверхні.

Не менш важливі властивості гвинтові траєкторії мають і з погляду теорії поверхонь, адже вони є геодезичними лініями, які мають кілька особливих властивостей, а саме є найкоротшими, фронтальними і найбільш прямими [8; 9].

Властивість геодезичної лінії, як найкоротшої полягає в тому, що всяка дуга геодезичної лінії є найкоротшою лінією на поверхні між двома довільними точками. З погляду технології обробки деталі на верстаті, властивість геодезичної лінії, як найкоротшої відповідає найкоротшій траєкторії інструменту при якій можливе формоутворення гвинтової поверхні деталі. Це забезпечує найбільшу продуктивність обробки, особливо у разі коли рух інструменту щодо деталі є гвинтовим.

Властивість геодезичної лінії, як фронтальної полягає в тому, що дотична до неї завжди збігається з напрямком ковзання поверхні самої по собі. З технологічного т погляду ця властивість геодезичної лінії (гвинтової траєкторії) дозволяє утворювати гвинтові поверхні шляхом видавлювання.

З погляду теорії профілювання властивість геодезичної лінії, як лінії ковзання, дозволяє використовувати поняття про “ковзання поверхні самої по собі” введене професором П. Р. Родіним [10] у теорію профілювання інструменту в середині минулого століття, що значно спрощує процес пошуку початкової інструментальної поверхні.

Властивість геодезичної лінії, як найбільш прямої полягає в тому, що нормаль до поверхні збігається з дотичною площиною геодезичної лінії. З погляду теорії формоутворення, це дозволяє досить просто визначити такі геометричні параметри гвинтової поверхні як дотична, нормаль, кривина, які є основними параметрами при дослідженні характеру дотику спряжених поверхонь інструмента та деталі.

На рис. 1, *а* зображена гвинтова поверхня, яка тріангульована плоскими трикутниками за традиційною методикою, і та сама поверхня, тріангульована сукупністю гвинтових траєкторій T_1 , T_2 і T_3 (рис. 1, *б*).

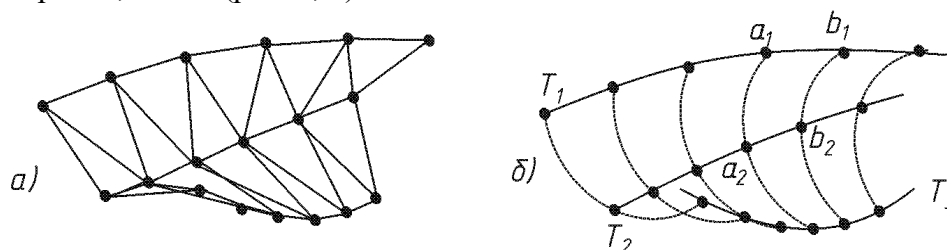


Рис. 1. Тріангуляція гвинтової поверхні

Джерело: розроблено автором.

В обох випадках тріангуляція поверхні була здійснена за одними і тими ж реперними точками. Якщо у разі застосування традиційної методики тріангуляції елементарний елемент має форму площинного трикутника, то при застосуванні тріангуляції гвинтовими траєкторіями він має форму тривимірного об'ємного чотирикутника $a_1b_1a_2b_2$, що більш точно відображає просторову гвинтову поверхню.

При цьому сторони a_1b_1 та a_2b_2 є гвинтовими траєкторіями, а сторони a_1a_2 та b_1b_2 є частинами торцевого перерізу гвинтової поверхні, який може бути представлений дугою кола. Слід зазначити, що при тріангуляції трикутними елементами визначити напрямок дотичної до поверхні в реперній точці досить складно, оскільки жодна з меж трикутника не збігається з гвинтовою поверхнею.

Водночас при тріангуляції поверхні гвинтовими траєкторіями напрямок дотичних уздовж двох протилежних меж a_1a_2 та b_1b_2 тріангуляційного елемента можливо визначити не тільки наближено, а й теоретично точно, що дозволяє здійснити дослідження умов формоутворення з мінімальною похибкою.

Раніше було зазначено, що як початкове положення точок сукупності гвинтових траєкторій, доцільно приймати точки торцевого перерізу досліджуваної поверхні, який можна замінити дугами кола.

Це дозволяє описати торцевий профіль гвинтової поверхні простішими функціональними залежностями і, що більш важливе, визначити диференціальні характеристики локальної ділянки гвинтової поверхні після її триангуляції гвинтовими траєкторіями.

Знаючи рівняння гвинтової траєкторії та параметри кола, що проходить через точки торцевого перерізу гвинтової поверхні, можна визначити напрямки нормалі та положення площини дотичної до поверхні, величини головних кривин та нормальної кривини, а також ряд інших параметрів.

Нехай торцевий переріз гвинтової поверхні представлено сукупністю точок M_i з координатами x_i та y_i при $i = 1 \dots n$. Якщо здійснити заміну всіх n точок торцевого профілю дугою кола, то координати x_c і y_c центру O_c кола та його радіус R можна знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} (x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2 = R^2, \\ (x_q - x_c)^2 + (y_q - y_c)^2 = R^2, \\ (x_s - x_c)^2 + (y_s - y_c)^2 = R^2, \end{cases}$$

де p, q і s – номери довільних розрахункових точок.

Стохастично надаючи параметрам p, q і s довільні значення в межах від 1 до n , і довільно групуючи трійки рівнянь наведених вище, можна визначити значення параметрів R, x_c та y_c для кожної трійки рівнянь. Тоді за остаточний результат приймають їхні середні арифметичні значення.

Як альтернативний спосіб визначення параметрів R, x_c та y_c можливо використовувати метод найменших квадратів, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\left(\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2} + R\right)(2x_c - 2x_i)}{\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2}} &= 0, \\ \sum \frac{\left(\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2} + R\right)(2y_c - 2y_i)}{\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2}} &= 0, \\ \sum \left(2R - 2\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Недоліком способу заміни всіх n точок профілю одним колом є те, що отримане коло не проходить через жодну з реперних точок. Проблема можна уникнути замінюючи профіль дугами, які проходять через групи з трьох реперних точок.

Таким чином, групуючи всі точки профілю по три у групі, можливо послідовно описати дугами весь торцевий профіль гвинтової поверхні. Проте в такому разі виникають щонайменше дві проблеми.

По-перше, знайдені кола не враховують характер розташування сусідніх точок профілю.

По-друге, параметри кола залежать від напрямку їхнього групування. Так, для двох точок M_2 та M_3 за рис. 2 маємо два різних кола $R_{(1,2,3)}$ і $R_{(2,3,4)}$ залежно від того, з якого боку групують реперні точки.

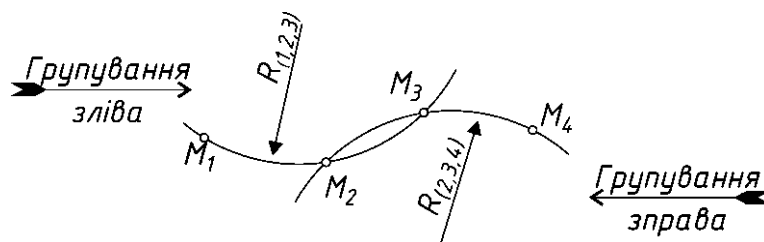


Рис. 2. Орієнтація кола залежно від напрямку групування реперних точок
Джерело: розроблено автором

Розглянута методика дозволяє замінити складний криволінійний профіль торцевого перерізу гвинтової поверхні сукупністю дуг, які проходять через реперні точки з допустимим відхиленням і враховують характер розташування сусідніх реперних точок.

На рис. 3, а зображена частина гвинтової поверхні, яка була тріангульована за допомогою двох гвинтових траєкторій T_1 та T_2 , а на рис. 3, б елементарний тріангуляційний чотирикутник $a_1b_1a_2b_2$, що обмежений двома гвинтовими траєкторіями T_1 та T_2 та двома дугами радіуса R .

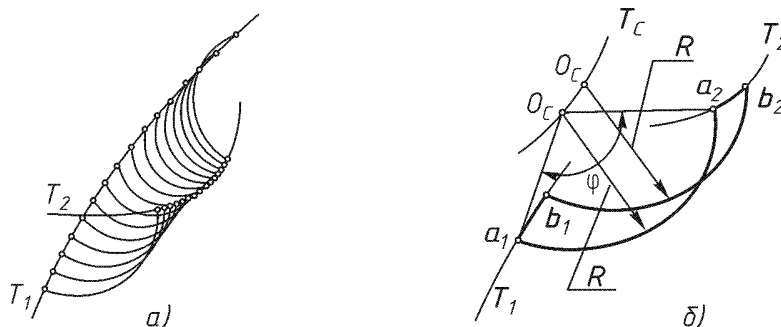


Рис. 3. Елементи тріангуляції:

а – схема тріангуляції гвинтовими траєкторіями; б – тріангуляційний елемент
Джерело: розроблено автором.

Необхідно відзначити, що центр O_c кола радіуса R рухається в просторі також по гвинтовій траєкторії T_c з гвинтовим параметром гвинтової поверхні.

Слід зазначити, що у випадку традиційної тріангуляції трикутниками для представлення всієї гвинтової поверхні необхідно зберігати інформацію про всі реперні точки розташовані на початковій гвинтовій поверхні, що вимагає значних інформаційних затрат.

Одночасно при тріангуляції гвинтовими траєкторіями достатньо зберігати інформацію тільки про радіус R , величину кута φ , що обмежує дугу кола і гвинтову траєкторію T_c .

Вся інша інформація щодо тріангуляції гвинтової поверхні може бути отримана на підставі розрахунків однакових для будь-якої її ділянки.

Тріангуляція гвинтової поверхні за допомогою сукупності гвинтових траєкторій дозволяє розглянути питання про достовірність подання тріангульованої поверхні. Можна стверджувати, що чим ближче одна до одної розташовані утворюючи траєкторії, тим більше достовірно представлена поверхня.

У той же час при тій самій відстані між сусідніми траєкторіями, достовірність представлення поверхні залежить від її форми. У зв'язку з цим доцільно ввести поняття про критерій достовірності представлення поверхні. Можливі кілька варіантів формулювання критерію достовірності подання поверхні.

Достовірність представлення поверхні за довжиною. Критерій достовірності $\aleph$ за довжиною подання тріангульованої поверхні, це відношення довжини l_T прямої лінії, яка з'єднує дві точки на сусідніх траєкторіях T_1 і T_2 , до довжини l_N найкоротшої лінії, що належить до номінальної поверхні між цими точками (рис. 4, а).

Отже, математично критерій достовірності $\aleph$ подання тріангульованої поверхні можна записати як $\aleph = \frac{l_T}{l_N}$. Такий критерій зручний тим, що у разі повного збігу номінальної поверхні та поверхні представленої дискретною кількістю траєкторій, чисельне значення критерію достовірності дорівнюватиме одиниці $\aleph = 1$, а за наявності відхилення (зазору) між номінальною та тріангульованою поверхнями, його значення буде менше одиниці.

Як площину, у якій лежать відрізки l_T і l_N , можна використовувати площину торцевого перерізу гвинтової поверхні, або нормальну площину до однієї з гвинтових траєкторій. Це дозволяє говорити про нормальний і торцевий критерії достовірності представлення гвинтової поверхні.

Достовірність представлення поверхні за відстанню. Як інший варіант критерію достовірності $\aleph_h$ можна використовувати величину відношення найбільшої відстані h між номінальною та тріангульованою поверхнями до відстані l_T між гвинтовими траєкторіями, що представляють гвинтову поверхню (рис. 4, б), що математично можна записати як $\aleph_h = h/l_T$.

Таке визначення критерію достовірності має ту перевагу, яка дозволяє вимірювати значення параметрів, що входять до нього безпосередньо на деталі. Однак його чисельне уявлення не зовсім коректне, оскільки у разі повного збігу поверхонь величина критерію виявляється рівною нулю, тобто $\aleph_h = 0$, що не дуже зручно.

Іншим варіантом критерію $\aleph_h$ може бути відношення l_T до h , тобто $\aleph_h = l_T/h$. Однак у такому випадку у разі повного збігу номінальної та тріангульованої поверхні (тобто у випадку $h = 0$) критерій достовірності буде дорівнювати нескінченності. Що також не дуже коректно.

Достовірність представлення поверхні за площею. Ще одним варіантом критерію достовірності подання поверхні може бути інтегральний показник площі F обмежений кривими номінальної l_N та тріангульованої l_T поверхонь у деякому перерізі (рис. 4, в). Проте, у цьому разі результат залежить від прийнятого масштабу лінійних вимірів, що призводить до неоднозначності чисельного представлення критерію.

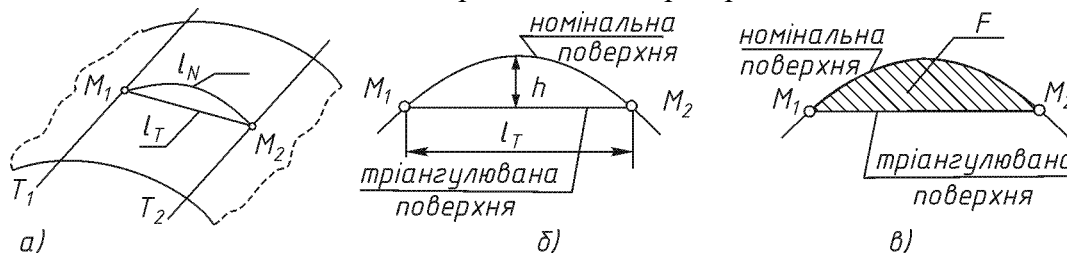


Рис. 4. Достовірність представлення поверхні:

а – достовірність за довжиною;

б – достовірність за відстанню; в – достовірність за площею

Джерело: розроблено автором

Таким чином, найбільш доцільною формою критерію достовірності подання гвинтової поверхні, яка була тріангульована за допомогою гвинтових траєкторій, є відношення довжини прямої l_T найкоротшої відстані між точками M_1 та M_2 , що належать сусіднім твірним траєкторіям T_1 і T_2 до довжини лінії l_N , що належить до номінальної поверхні розташованої між цими точками.

Розглянемо способи визначення диференціальних характеристик гвинтової поверхні тріангульованої за допомогою гвинтових траєкторій. З гвинтовою поверхнею зв'яжемо систему координат $\{XYZ\}$, що орієнтована у такий спосіб. Вісь Z збігається з віссю гвинтової поверхні, а координатна площина (XY) збігається з її торцевим перерізом точки якого визначені полярним радіус-вектором ρ та полярним кутом δ .

Рівняння гвинтової траєкторії T довільної точки M , що належить до торцевого перерізу гвинтової поверхні, можна подати у векторній формі радіусом-вектором $\mathbf{r}$ величина якого залежить від кута t повороту точки M навколо осі Z .

У цьому випадку параметр t , це кут на який повернулась точка M навколо осі гвинтової поверхні під час руху по гвинтовій траєкторії, тобто вздовж осі гвинтової поверхні

$$\mathbf{r} = [\rho \cos(\delta + t) \quad \rho \sin(\delta + t) \quad pt]^T,$$

де t – змінний параметр, чисельна величина якого дорівнює куту повороту точки M навколо осі Z ;

ρ – полярний радіус-вектор точки M у торцевому перерізі гвинтової поверхні;

δ – полярний кут точки M у торцевому перерізі гвинтової поверхні;

p – гвинтовий параметр гвинтової поверхні $p = H/2\pi$, де параметр H – крок гвинтової траєкторії (поверхні).

Тоді вектор $\mathbf{k}_R$ дотичний до гвинтової траєкторії можна визначити як

$$\mathbf{k}_R = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [-\rho \sin(\delta + t) \quad \rho \cos(\delta + t) \quad p]^T.$$

Знаючи параметри R , x_c і y_c кола, що описує торцевий профіль можливо визначити вектор $\mathbf{k}_T$ дотичний до профілю гвинтової поверхні у її торцевому перерізі

$$\mathbf{k}_T = [\cos \xi \quad \sin \xi \quad 0]^T.$$

У наведеному виразі параметр ξ це кут між додатним напрямом осі X і напрямом дотичної $\mathbf{k}_T$ до профілю поверхні в її торцевому перерізі.

Положення двох векторів $\mathbf{k}_R$ і $\mathbf{k}_T$ дотичних до поверхні однозначно визначає положення площини дотичної до гвинтової поверхні і нормаль $\mathbf{n}$ до неї, яку можна знайти, як векторний добуток $\mathbf{n} = \mathbf{k}_R \times \mathbf{k}_T$ або у розгорнутому виді

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\rho \sin(\delta + t) \\ \rho \cos(\delta + t) \\ p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \xi \\ \sin \xi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \sin \xi \\ p \cos \xi \\ -p \cos(t + \delta + \xi) \end{bmatrix}.$$

Слід вказати, що вектор $\mathbf{k}_R$ описує дотичну до безперервної траєкторії T , а вектор $\mathbf{k}_T$ дотичну до кола між двома реперними точками і тому обидва вектори $\mathbf{k}_R$ і $\mathbf{k}_T$ є безперервними параметрами.

Отже, триангуляція гвинтової поверхні з використанням гвинтових траєкторій дозволяє отримати безперервні характеристики положення дотичної площини й нормалі до гвинтової поверхні, у всій області її існування, яке не можливо при традиційних способах триангуляції площинними кінцевими елементами.

Значною перевагою триангуляції гвинтовими траєкторіями є те, що у більшості випадків формування гвинтової поверхні, гвинтові траєкторії збігаються з напрямком руху інструменту щодо заготовки.

Визначимо диференціальні геометричні характеристики гвинтової поверхні. Приймаючи за додатний напрямок гвинтової траєкторії напрямок, який збігається з рухом точки M при зростанні параметра t , можна визначити диференціал дуги ds як

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + p^2} dt.$$

Тоді орт $\boldsymbol{\tau}$ дотичної до гвинтової траєкторії можна визначити як

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{[-\rho \sin(\delta + t) \quad \rho \cos(\delta + t) \quad p]^T}{\sqrt{\rho^2 + p^2}}.$$

Чисельне значення кривини K гвинтової траєкторії в розрахунковій точці M можна визначити як

$$K = \left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{\rho}{\rho^2 + p^2},$$

$$d\boldsymbol{\tau} = \frac{[-\rho \sin(\delta + t) \quad \rho \cos(\delta + t) \quad p]^T}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} dt.$$

Звідки можна визначити орт $\mathbf{v}$ головної нормалі

$$\mathbf{v} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = [-\cos(\delta + t) \quad -\sin(\delta + t) \quad 0]^T.$$

Знаючи вирази для ортів дотичної $\boldsymbol{\tau}$ та головної нормалі $\mathbf{v}$ можна визначити напрямок орта бінормалі $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + p^2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\rho \sin(\delta + t) & \rho \cos(\delta + t) & p \\ -\cos(\delta + t) & -\sin(\delta + t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Величину кручення T можна визначити через орт головної нормалі $\mathbf{v}$ та орт бінормалі $\boldsymbol{\beta}$ як

$$T = -\mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \frac{p \cos^2(\delta + t) + p \sin^3(\delta + t)}{\rho^2 + p^2}.$$

Отже, в кожній точці що належить межі триангуляційного елемента, можливо безперервно і теоретично точно визначити основні диференційні геометричні параметри гвинтової поверхні, що своєю чергою дозволяє виконати теоретично коректне дослідження формування гвинтової поверхні.

Таким чином, при використанні гвинтових траєкторій з одночасною заміною криволінійного торцевого профілю дугами кола, чисельне значення цих параметрів буде безперервно і плавно змінюватися вздовж кожної з чотирьох меж (кордонів) триангуляційного елемента.

Водночас при триангуляції плоскими елементами, параметри локальної геометрії триангульованої поверхні стрибкоподібно змінюють свої значення від елемента до елемента.

Практичне використання результатів. Отримані результати можуть бути використані при пошуку початкової інструментальної поверхні фасонного інструменту, який застосовують у виробничих процесах машинобудування.

Знаючи параметри початкової інструментальної поверхні можна теоретично точно визначити профіль фасонних різальних кромek інструмента та знайти їх оптимальні параметри, що підвищить загальну продуктивність обробки гвинтових деталей.

Найбільш доцільним є використання запропонованої методики при проектуванні інструменту за кінематичним методом [10; 11], який оперує з визначеними вище диференціальними параметрами гвинтової поверхні й на теперішній час є найбільш ефективним та теоретично обґрунтованим.

Висновки. У роботі вперше запропоновано метод триангуляції гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій, що дозволяє перейти від дискретного визначення диференціальних характеристик локальної геометрії триангульованої поверхні, до безперервного. Це дає можливість теоретично точно визначати положення нормалей і дотичних у будь-якій точці на межі сусідніх триангуляційних елементів.

Представлення гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій, з одночасною інтерполяцією профілю торцевого перерізу гвинтової поверхні частиною дуги кола, дозволяє визначати диференціальні характеристики гвинтової поверхні для будь-якої точки триангуляційного елемента. У той час як при триангуляції плоскими елементами, ці характеристики є постійними в межах одного елемента, що не відповідає дійсності.

При використанні триангуляції гвинтової поверхні сукупністю гвинтових траєкторій і дуг кола достатньо зберігати інформацію тільки про торцевий переріз поверхні і один пласт триангуляційних елементів. Повне уявлення всієї поверхні та її диференціальні характеристики, у будь-якій точці, можна отримати шляхом розрахунків за наведеними вище залежностями, однаковим для будь-якої точки гвинтової поверхні.

Подальшим напрямком розвитку викладеного матеріалу, може бути вибір оптимального кроку розташування гвинтових траєкторій, при якому похибка триангуляції буде однаковою для всієї гвинтової поверхні.

Викладені результати можуть бути застосовані при проєктуванні високопродуктивного інструмента для обробки гвинтових поверхонь у сучасному машинобудуванні.

Список використаних джерел

1. Оробей, В. Ф., Дашченко, О. Ф., & Лимаренко, О. М. (2013). Метод граничних елементів у задачах з нестійкими рішеннями. *Праці Одеського політехнічного інституту*, 2(41), 27–31.
2. Амиро, І. Я., & Заруцки, В. А. (1980). *Теорія ребристих оболонок*. Наукова думка.
3. Гавриленко, Г. Д., & Трубицина, О. А. (2008). *Коливання та стійкість ребристих оболонок обертання*. Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України.
4. Бразалук, Ю. В., Євдокимов, Д. В., & Поляков, Н. В. (2008). Спільне застосування методу малого параметра та методу граничних елементів для чисельного вирішення еліптичних завдань із малими обуреннями. *Вісник ХНУ*, 703, 50–66.
5. Романюк, А., & Сторчак, А. (2010). Алгоритми триангуляції. *Вінницький національний технічний університет Комп'ютери та програми*, 1, 11–20.
6. Чопоров, С. В., Гоменюк, С. І., Лисняк, А. А., Аль-Омарі, М. В., & Алатамхан, Х. М. (2016). Триангуляція поверхонь при гібридному параметричному та неявному поданні. *Вісник Херсонського національного технічного університету*, 3, 542–549.
7. Krashanytsya, Y., & Hoshmandi, A. (2016). Triangulation method of bearing surfaces of aircraft systems. *Авіаційно-космічна техніка та технологія*, 8(135), 11–15.
8. Городецький, В. В., & Мартинюк, О. В. (2009). *Диференціальна геометрія в теоремах і задачах*. Книги ХХІ.
9. Борисенко, О. (1995). *Диференціальна геометрія та топологія*. Основа.
10. Родін, П. Р. (1977). *Основи формування поверхонь різанням*. Вища школа.
11. Равська, Н. С., Мельничук, П. П., Мамлюк, О. В., Ніколаєнко, Т. П., & Охріменко, О. А. (2013). *Основи формування поверхонь при механічній обробці*. СКД "Друк".

References

1. Orobei, V. F., Dashchenko, O. F., & Lymarenko, O. M. (2013). Metod hranychnykh elementiv u zadachakh z nestiikymy rishenniamy [Boundary element method in problems with unstable solutions]. *Pratsi Odeskoho politekhnichnoho instytutu – Proceedings of the Odessa Polytechnic Institute*, 2(41), 27–31.
2. Amyro, I. Ya., & Zarutsky, V. A. (1980). *Teoriia rebrystykh obolonok [Ribbed shell theory]*. Naukova dumka.
3. Havrylenko, H. D., & Trubytsyna, O. A. (2008). *Kolyvannia ta stiikist rebrystykh obolonok obertannia [Oscillations and stability of ribbed shells of rotation]*. Instytut mekhaniky im. S. P. Tymoshenka NAN Ukrainy.
4. Brazaluk, Yu. V., Yevdokymov, D. V., & Poliakov, N. V. (2008). Spilne zastosuvannia metodu maloho parametra ta metodu hranychnykh elementiv dlia chyselnoho vyrishennia eliptychnykh zavdan iz malymy oburenniamy [Joint application of the small parameter method and the boundary element method for numerical solution of elliptic problems with small perturbations]. *Visnyk KhNU – Bulletin of the Kharkiv Polytechnic Institute*, 703, 50–66.

5. Romaniuk, A., & Storchak, A. (2010). Alhorytmy trianhuliatsii [Triangulation algorithms]. *Vinnytskyi natsionalnyi tekhnichnyi universytet Kompiutery ta prohramy – Vinnytsia National Technical University Computers and Programs*, 1, 11–20.
6. Choporov, S. V., Homeniuk, S. I., Lysniak, A. A., Al-Omari, M. V., & Alathamkhan, Kh. M. (2016). Trianhuliatsiia poverkhon pry hibrydnomu parametrychnomu ta neiaвному podanni. [Surface triangulation in hybrid parametric and implicit representation]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu – Bulletin of the Kherson National Technical University*, 3, 542–549.
7. Krashanytsya, Y., & Hoshmandi, A. (2016). Triangulation method of bearing surfaces of aircraft systems [Triangulation method of bearing surfaces of aircraft systems]. *Aviatsiino-kosmichna tekhnika ta tekhnolohiia – Aerospace engineering and technology*, 8(135), 11–15.
8. Horodetskyi, V. V., & Martyniuk, O. V. (2009). Dyferentsialna heometriia v teoremax i zadachakh [Differential geometry in theorems and problems]. *Knyhy XXI*.
9. Borysenko, O. (1995). *Dyferentsialna heometriia ta topolohiia [Differential geometry and topology]*. Osnova.
10. Rodin, P. R. (1977). *Osnovy formoutvorennia poverkhon rizanniam [Fundamentals of surface shaping by cutting]*. Vyshcha shkola.
11. Ravska, N. S., Melnychuk, P. P., Mamliuk, O. V., Nikolaienko, T. P., & Okhrimenko, O. A. (2013). *Osnovy formoutvorennia poverkhon pry mekhanichnii obrobsi [Fundamentals of surface shaping during machining]*. SKD "Druk".

Отримано 05.05.2025

UDC 621.914(075.8)

Valerii Solodkyi

PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Manufacturing Engineering
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" (Kyiv, Ukraine)
E-mail: solodkiyv@ukr.net, **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-2595-5436>, **ResearcherID:** [MZQ-5574-2025](https://pubs.rsos.royalsocietypublishing.org/author/MZQ-5574-2025)

TRIANGULATION OF HELICAL SURFACES IN FORMING PROCESSES

Using modern triangulation methods allows simplifying problems of representing complex shaped surfaces when studying processes of forming parts and designing shaped cutting tools.

The main problem in solving shaping problems is the problem of adequate representation of local differential characteristics of the surface, namely: tangent, normal, curvature and torsion. The surface represented by a set of flat triangulation elements has only discrete values of the specified parameters of the local geometry of the surface, while for the nominal surface of the part they are continuous.

Analysis of research and publications on triangulation of shaped helical surfaces by flat finite elements showed that the use of flat elements introduces significant errors into the study of shaping processes and the search for a theoretically accurate profile of the cutting tool.

The aim of the article is to develop the method for triangulating a helical surface using helical trajectories, which makes it possible to move from discrete representation of differential characteristics of helical surface to continuous one and to formulate mathematical dependencies that describe characteristics of the surface.

Based on the differential theory of surfaces, the method for triangulating helical surface with spatial cylindrical elements whose boundaries are helical trajectories of the points of the end section of the part has been developed. Criteria for reliable representation of the triangulated surface have been formulated. Mathematical dependencies have been derived for determining differential characteristics of the local geometry of the surface after its triangulation by helical trajectories.

In the article, the method for triangulating helical surface using a set of helical trajectories was proposed for the first time, which allows moving from discrete determination of differential characteristics of the local geometry of the triangulated surface to continuous one. The presented materials can be used to study processes of forming and search for the profile of the initial tool surfaces in conventional processes of processing parts.

Keywords: triangulation, helical surfaces, forming.

Fig.: 4. **References:** 11.