

РОЗДІЛ I. МЕХАНІКА

УДК 539.3:539.4

В.Ю. Грицюк, канд. техн. наук

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

РОЗРАХУНОК УДАРУ ТІЛОМ ПО КОНСОЛЬНІЙ БАЛЦІ

В.Е. Грицюк, канд. техн. наук

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

РАСЧЁТ УДАРА ТЕЛОМ ПО КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ

Vitalii Hrytsiuk, PhD in Technical Sciences

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

CALCULATION OF A BODY IMPACT ON A CANTILEVER BEAM

Існують різні моделі ударної взаємодії тіл. Найбільш досконалою можна вважати модель С.П. Тимошенка, яка проілюстрована ударом тіла по шарнірно опертій балці. Враховуються не тільки деформації балки, але й місцеві деформації обох тіл, які взаємодіють. У цій роботі розглянуто удар тілом по консольній балці.

Ключові слова: розрахунок, балка, тіло, удар.

Существуют различные модели ударного взаимодействия тел. Наиболее совершенной можно считать модель С.П. Тимошенко, которая проиллюстрирована ударом тела по шарнирно опертой балке. Учитываются не только деформации балки, но и местные деформации обоих взаимодействующих тел. В данной работе рассмотрен удар телом по консольной балке.

Ключевые слова: расчёт, балка, тело, удар.

There are various models of the impact of bodies. The most perfect can consider model of S. P. Timoshenko which is illustrated with impact of a body on a beam on hinge supports. Are considered not only deformations of a beam, but also local deformations of both interacting bodies. In this work the impact to a console beam is considered by a body.

Key words: calculation, beam, body, impact.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій, мета статті.

Широко відомою є модель С.П. Тимошенка розрахунку балки на дію поперечного удару тілом [1]. Ця модель враховує місцеві деформації під час взаємодії тіла і балки. Проілюстрована розрахунком удару по шарнірно опертій балці (рис. 1, а). У монографії [2] справедливо відзначено, що «случай, подвергнутый многочисленным исследованиям, относится к центральному упругому удару сферы о свободно опертую балку с постоянным прямоугольным поперечным сечением...». Можна стверджувати, що це твердження залишається справедливим до наших часів. Щоб заповнити прогалину, у цій роботі розглянуто удар тілом по консольній балці (рис. 1, б).

Математична модель

Розглянемо удар тілом по балці (рис. 1).

Силу контактної взаємодії $F(t)$ тіла і балки можна знайти з рівняння

$$d(F) = \alpha(F) + w_F(x_F, F), \quad (1)$$

де d – вертикальні переміщення тіла;

α – вертикальні переміщення тіла, викликані контактними деформаціями у місці взаємодії тіл (тіла і балки);

w_F – вертикальні переміщення балки у місці знаходження тіла;

x_F – горизонтальна координата цього місця.

Рівняння (1) є відомим рівнянням поперечного удару тілом по балці, запропонованого С.П. Тимошенком [1].

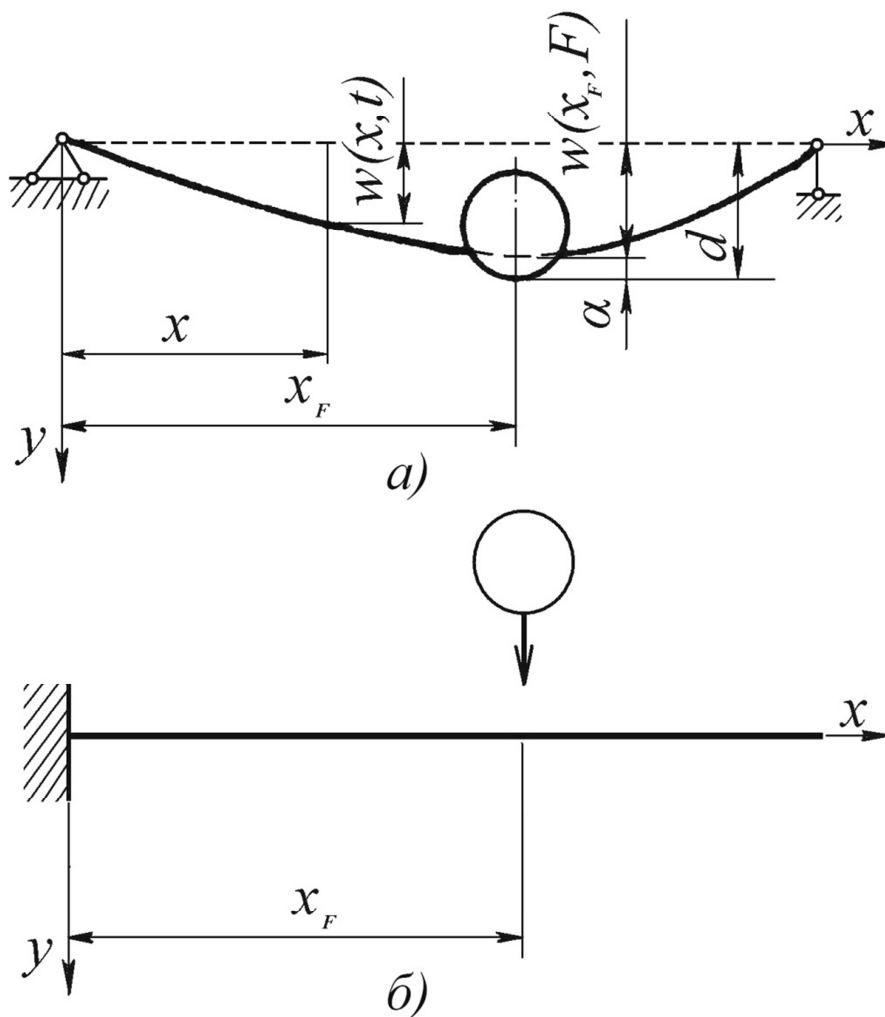


Рис. 1. Розрахункові схеми

Вертикальні переміщення тіла d можна визначити за допомогою формули

$$d(t) = d_0 + \dot{d}_0 t + g \frac{t^2}{2} - \frac{1}{M} \int_0^t F(t_1)(t-t_1) dt_1, \quad (2)$$

де d_0 , \dot{d}_0 – початкові вертикальні переміщення і швидкість тіла;

g – прискорення земного тяжіння;

M – маса тіла;

t – час.

Якщо удар не вертикальний, а боковий, то третій доданок у формулі (2) не враховується.

Переміщення a можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Для врахування розсіювання енергії у матеріалі балки пружні характеристики її матеріалу запишемо у комплексній формі

$$E = E(1 \pm i\beta), \quad (3)$$

де E – модуль Юнга матеріалу балки;

β – коефіцієнт розсіювання енергії у матеріалі балки;

i – уявна одиниця.

Розкладаючи переміщення балки і навантаження у тригонометричні ряди, одержуємо вертикальні переміщення балки

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \cdot T_j(t). \tag{4}$$

Переміщення α можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Для шарнірно опертої по кінцях балки довжиною l (рис. 1, *a*) власні форми коливань балки

$$X_j(x) = \sin \alpha_j x, \quad \alpha_j = \frac{j\pi}{l}. \tag{5}$$

Для консольної балки довжиною l (рис. 1, *б*) власні форми коливань балки

$$X_j(x) = (sh \alpha_j l + \sin \alpha_j l)(ch \alpha_j x - \cos \alpha_j l) - (ch \alpha_j l + \cos \alpha_j l)(sh \alpha_j x - \sin \alpha_j l). \tag{6}$$

Числа α_j треба визначати з рівнянь

$$\cos \alpha_j l \cdot ch \alpha_j l + 1 = 0. \tag{7}$$

Мабуть, завдяки простоті запису власних форм коливань для шарнірно опертої по кінцях балки (відповідно, порівняно більш простих розрахунків) наводять приклади розрахунків саме для такої балки.

Функції часу

$$T_j(t) = e^{-\mu_j t} \left[T(0) \left(\frac{\mu_j}{\omega_j} \sin \omega_j t + \cos \omega_j t \right) + \frac{\dot{T}_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right] + \frac{X_j(x_F)}{m \cdot \int_0^l X_j(x)^2 dx \cdot \omega_j^0} \int_0^t F(t) \cdot e^{-\mu_j(t-t_1)} \cdot \sin \omega_j(t-t_1) dt_1, \tag{8}$$

$$\omega_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m}}, \quad \mu_j = \frac{\beta}{2} \omega_j = \frac{\psi}{4\pi} \omega_j, \tag{9}$$

де ω_j – частоти власних коливань балки;

m – маса одиниці довжини балки;

I_z – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

Найбільші нормальні напруження у довільному поперечному перерізі балки визначаються таким чином

$$\sigma(x,t) = \frac{EI_z}{W_z} \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{EI_z}{W_z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 X_j(x)}{dx^2} \cdot T_j(t), \tag{10}$$

де W_z – осьовий момент опору поперечного перерізу балки.

Реалізація задачі

Рівняння (1) дозволяє визначити силу $F(t)$. Це робиться чисельно на послідовних малих кроках часу τ . Існують різні алгоритми чисельної реалізації [3]. У цій роботі застосовувалася ступінчаста апроксимація ядра інтеграла $F(t)$ у формулі (7).

Реалізація задачі виконувалася за допомогою математичного пакета MathCAD.

Для наочності на рис. 2 наведено фрагмент програми.

$$\begin{aligned}
 X(i, x) &:= \left[(\sinh(\alpha_i \cdot l) + \sin(\alpha_i \cdot l)) \cdot (\cosh(\alpha_i \cdot x) - \cos(\alpha_i \cdot x)) \right] \dots \\
 &\quad + (-1) \cdot \left[(\cosh(\alpha_i \cdot l) + \cos(\alpha_i \cdot l)) \cdot (\sinh(\alpha_i \cdot x) - \sin(\alpha_i \cdot x)) \right] \\
 B_i &:= \int_0^1 X(i, x)^2 dx \quad x_F := 0.5 \cdot l \quad x := 0 \quad Y(i, x) := \frac{d^2}{dx^2} X(i, x) \\
 T(i, t, T_0, T_{10}, F) &:= e^{-\mu_i t} \cdot \left[T_{0i} \cdot \left(\frac{\mu_i}{\omega_i} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) + \cos(\omega_i \cdot t) \right) \dots \right] \dots \\
 &\quad + \frac{T_{10i}}{\omega_i} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\
 &\quad + \frac{X(i, x_F)}{m \cdot B_i \cdot \omega_i} \cdot \int_0^t F \cdot e^{-\mu_i(t-t_1)} \cdot \sin[\omega_i \cdot (t-t_1)] dt_1 \\
 T1(i, t, T_0, T_{10}, F) &:= \frac{d}{dt} T(i, t, T_0, T_{10}, F) \\
 d(t, F, d_0, d_{10}) &:= d_0 + d_{10} \cdot t + \frac{g_1 \cdot t^2}{2} - \frac{1}{M} \cdot \int_0^t F \cdot (t-t_1) dt_1 \\
 d1(t, F, d_0, d_{10}) &:= \frac{d}{dt} d(t, F, d_0, d_{10})
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Фрагмент програми

Приклад розрахунку

Розглянемо боковий удар (горизонтальний удар, тоді у формулі (2) $g = 0$, тобто вага тіла не враховується) по середині сталевій консольній балці (рис. 1, б) довжиною $l = 20,0$ см прямокутного поперечного перерізу 1×1 см. Ударяє сталевий куля, радіус якої $1,0$ см, з початковою швидкістю $1,0$ см/с.

Вибраний крок часу (крок інтегрування рівнянь) τ дорівнює $1/180$ періоду першого тону власних коливань балки. Сила F визначалася із точністю до 1 %. Під час визначення переміщень і напружень були враховані 12 форм коливань балки. Коефіцієнт розсіяння енергії $\psi = 0,2$.

Результати розрахунку наведено на рис. 3.

На рис. 3, а представлена сила контактної взаємодії між тілом і балкою $F(t)$.

На рис. 3, б – переміщення тіла d ; прогин перерізу балки, у якому відбувається удар, w_F ; величина цього прогину при статичному прикладанні навантаження w_F^{cm} ; прогин вільного кінця балки w_l .

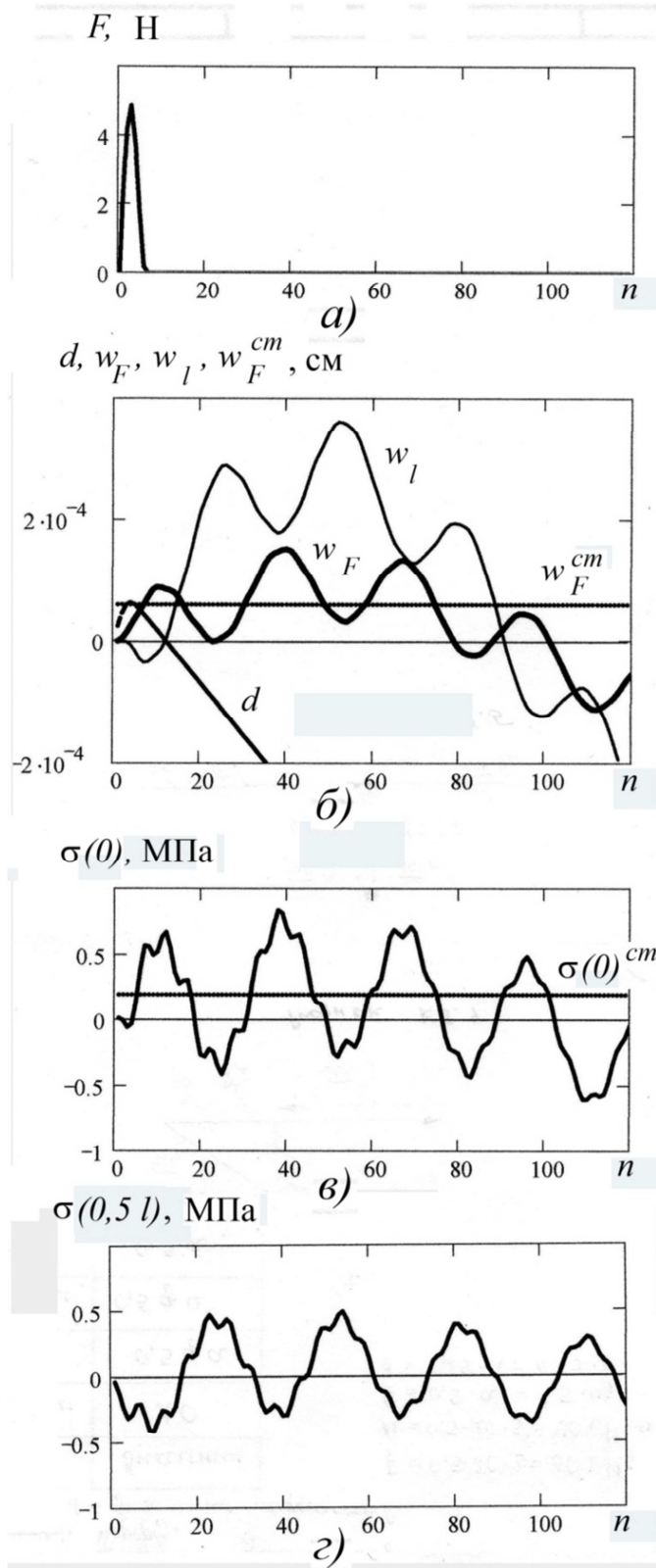


Рис. 3. Результати розрахунку

На рис. 3, в – напруження $\sigma(0)$ на лівому кінці балки і напруження $\sigma(0)^{cm}$ у цьому місці при статичному навантаженні балки.

На рис. 3, г – напруження $\sigma(0,5l)$ у перерізі середини балки.

Висновки. Наведено розрахунки удару тілом по консольній балці. Це може бути цікавим з наукового погляду і корисним в інженерній практиці. Розрахунки проілюстрували нові можливості сучасної обчислювальної техніки. Але конструкція, до якої прикладається ударне навантаження, може бути суттєво складнішою. В цьому випадку рух конструкції зручно описувати, застосовуючи метод скінченних елементів. Для наведеного у цій роботі прикладу такі розрахунки були виконані та одержані результати. З одного боку, ці розрахунки перевірили правильність одержаних результатів. З іншого – застосування методу скінченних елементів розкриває широкі можливості для розрахунку досить складних конструкцій на різні види динамічних навантажень.

Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит ; пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лузина. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.
3. Грицюк В. Ю. Алгоритми чисельного розрахунку малих коливань механічних систем / В. Ю. Грицюк // Вісник Чернігівського держ. техн. ун-ту. – 2001. – № 12. – С. 43–46.

УДК 534.1:539.3

О. В. Савченко, канд. техн. наук

О. Л. Деркач, аспірант

С. М. Ющенко, аспірант

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

О. В. Савченко, канд. техн. наук

О. Л. Деркач, аспірант

С. М. Ющенко, аспірант

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Olena Savchenko, PhD in Technical Sciences

Oleh Derkach, PhD student

Svitlana Yushchenko, PhD student

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

DETERMINATION OF EFFECTIVE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE ELECTRO-VISCOELASTIC COMPOSITE MATERIALS

Розглянуто дві методики визначення ефективних в'язкопружних, п'єзоелектричних та діелектричних динамічних характеристик композиційного матеріалу з п'єзоелектричними шарами. За першою методикою композиційна структура розглядається як квазіоднорідний матеріал з використанням гіпотез Фойхтга-Рейсса; за другою – проводиться чисельний аналіз ефективних характеристик композиційного макронеоднорідного матеріалу за допомогою методу скінченних елементів. Результати досліджень порівнюються.

Ключові слова: п'єзоелектричний матеріал, композиційний матеріал, ефективні характеристики, декремент коливань, метод скінченних елементів.

Рассмотрено две методики определения эффективных вязкоупругих, пьезоэлектрических и диэлектрических динамических характеристик композиционного материала с пьезоэлектрическими слоями. По первой методике композиционная структура рассматривается как квазиоднородный материал с использованием гипотез Фойхтга-Рейсса; по второй – проводится численный анализ эффективных характеристик композиционного макронеоднородного материала с помощью метода конечных элементов. Проводится сравнение результатов исследования.

Ключевые слова: пьезоэлектрический материал, композиционный материал, эффективные характеристики, декремент колебаний, метод конечных элементов.

Two methods for determining the effective viscoelastic, piezoelectric and dielectric dynamic characteristics of composite material with piezoelectric layers are considered. According to the first method composite structure is regarded as a quasi-