

## РОЗДІЛ I. МЕХАНІКА

УДК 539.3:539.4

**В.Ю. Грицюк**, канд. техн. наук

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

### РОЗРАХУНОК УДАРУ ТІЛОМ ПО КОНСОЛЬНІЙ БАЛЦІ

**В.Е. Грицюк**, канд. техн. наук

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

### РАСЧЁТ УДАРА ТЕЛОМ ПО КОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ

**Vitalii Hrytsiuk**, PhD in Technical Sciences

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

### CALCULATION OF A BODY IMPACT ON A CANTILEVER BEAM

*Існують різні моделі ударної взаємодії тіл. Найбільш досконалою можна вважати модель С.П. Тимошенка, яка проілюстрована ударом тіла по шарнірно опертій балці. Враховуються не тільки деформації балки, але й місцеві деформації обох тіл, які взаємодіють. У цій роботі розглянуто удар тілом по консольній балці.*

**Ключові слова:** розрахунок, балка, тіло, удар.

*Существуют различные модели ударного взаимодействия тел. Наиболее совершенной можно считать модель С.П. Тимошенко, которая проиллюстрирована ударом тела по шарнирно опертой балке. Учитываются не только деформации балки, но и местные деформации обоих взаимодействующих тел. В данной работе рассмотрен удар телом по консольной балке.*

**Ключевые слова:** расчёт, балка, тело, удар.

*There are various models of the impact of bodies. The most perfect can consider model of S. P. Timoshenko which is illustrated with impact of a body on a beam on hinge supports. Are considered not only deformations of a beam, but also local deformations of both interacting bodies. In this work the impact to a console beam is considered by a body.*

**Key words:** calculation, beam, body, impact.

#### Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій, мета статті.

Широко відомою є модель С.П. Тимошенка розрахунку балки на дію поперечного удару тілом [1]. Ця модель враховує місцеві деформації під час взаємодії тіла і балки. Проілюстрована розрахунком удару по шарнірно опертій балці (рис. 1, а). У монографії [2] справедливо відзначено, що «случай, подвергнутый многочисленным исследованиям, относится к центральному упругому удару сферы о свободно опертую балку с постоянным прямоугольным поперечным сечением...». Можна стверджувати, що це твердження залишається справедливим до наших часів. Щоб заповнити прогалину, у цій роботі розглянуто удар тілом по консольній балці (рис. 1, б).

#### Математична модель

Розглянемо удар тілом по балці (рис. 1).

Силу контактної взаємодії  $F(t)$  тіла і балки можна знайти з рівняння

$$d(F) = \alpha(F) + w_F(x_F, F), \quad (1)$$

де  $d$  – вертикальні переміщення тіла;

$\alpha$  – вертикальні переміщення тіла, викликані контактними деформаціями у місці взаємодії тіл (тіла і балки);

$w_F$  – вертикальні переміщення балки у місці знаходження тіла;

$x_F$  – горизонтальна координата цього місця.

Рівняння (1) є відомим рівнянням поперечного удару тілом по балці, запропонованого С.П. Тимошенком [1].

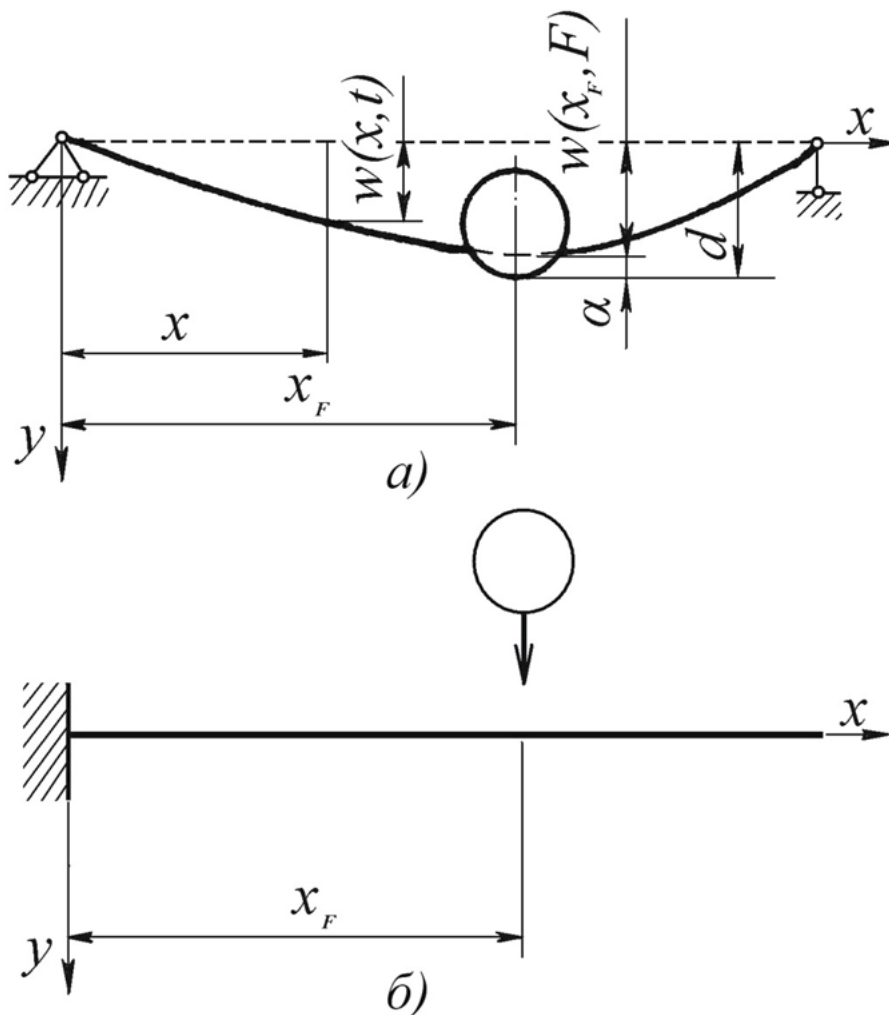


Рис. 1. Розрахункові схеми

Вертикальні переміщення тіла  $d$  можна визначити за допомогою формули

$$d(t) = d_0 + \dot{d}_0 t + g \frac{t^2}{2} - \frac{1}{M} \int_0^t F(t_1)(t-t_1) dt_1, \quad (2)$$

де  $d_0$ ,  $\dot{d}_0$  – початкові вертикальні переміщення і швидкість тіла;

$g$  – прискорення земного тяжіння;

$M$  – маса тіла;

$t$  – час.

Якщо удар не вертикальний, а боковий, то третій доданок у формулі (2) не враховується.

Переміщення  $a$  можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Для врахування розсіювання енергії у матеріалі балки пружні характеристики її матеріалу запишемо у комплексній формі

$$E = E(1 \pm i\beta), \quad (3)$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу балки;

$\beta$  – коефіцієнт розсіювання енергії у матеріалі балки;

$i$  – уявна одиниця.

Розкладаючи переміщення балки і навантаження у тригонометричні ряди, одержуємо вертикальні переміщення балки

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \cdot T_j(t). \quad (4)$$

Переміщення  $\alpha$  можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Для шарнірно опертої по кінцях балки довжиною  $l$  (рис. 1, а) власні форми коливань балки

$$X_j(x) = \sin \alpha_j x, \quad \alpha_j = \frac{j\pi}{l}. \quad (5)$$

Для консольної балки довжиною  $l$  (рис. 1, б) власні форми коливань балки

$$X_j(x) = (sh \alpha_j l + \sin \alpha_j l)(ch \alpha_j x - \cos \alpha_j l) - (ch \alpha_j l + \cos \alpha_j l)(sh \alpha_j x - \sin \alpha_j l). \quad (6)$$

Числа  $\alpha_j$  треба визначати з рівнянь

$$\cos \alpha_j l \cdot ch \alpha_j l + 1 = 0. \quad (7)$$

Мабуть, завдяки простоті запису власних форм коливань для шарнірно опертої по кінцях балки (відповідно, порівняно більш простих розрахунків) наводять приклади розрахунків саме для такої балки.

#### Функції часу

$$T_j(t) = e^{-\mu_j t} \left[ T(0) \left( \frac{\mu_j}{\omega_j} \sin \omega_j t + \cos \omega_j t \right) + \frac{\dot{T}_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right] + \frac{X_j(x_F)}{m \cdot \int_0^l X_j(x)^2 dx \cdot \omega_j} \int_0^t F(t_1) \cdot e^{-\mu_j(t-t_1)} \cdot \sin \omega_j(t-t_1) dt_1, \quad (8)$$

$$\omega_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m}}, \quad \mu_j = \frac{\beta}{2} \omega_j = \frac{\psi}{4\pi} \omega_j, \quad (9)$$

де  $\omega_j$  – частоти власних коливань балки;

$m$  – маса одиниці довжини балки;

$I_z$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

Найбільші нормальні напруження у довільному поперечному перерізі балки визначаються таким чином

$$\sigma(x, t) = \frac{EI_z}{W_z} \cdot \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \frac{EI_z}{W_z} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d^2 X_j(x)}{dx^2} \cdot T_j(t), \quad (10)$$

де  $W_z$  – осьовий момент опору поперечного перерізу балки.

#### Реалізація задачі

Рівняння (1) дозволяє визначити силу  $F(t)$ . Це робиться чисельно на послідовних малих кроках часу  $\tau$ . Існують різні алгоритми чисельної реалізації [3]. У цій роботі застосовувалася ступінчаста апроксимація ядра інтеграла  $F(t)$  у формулі (7).

Реалізація задачі виконувалася за допомогою математичного пакета MathCAD.

Для наочності на рис. 2 наведено фрагмент програми.

$$\begin{aligned}
 X(i, x) &:= \left[ (\sinh(\alpha_i \cdot l) + \sin(\alpha_i \cdot l)) \cdot (\cosh(\alpha_i \cdot x) - \cos(\alpha_i \cdot x)) \right] \dots \\
 &\quad + (-1) \cdot \left[ (\cosh(\alpha_i \cdot l) + \cos(\alpha_i \cdot l)) \cdot (\sinh(\alpha_i \cdot x) - \sin(\alpha_i \cdot x)) \right] \\
 B_i &:= \int_0^1 X(i, x)^2 dx \quad xF := 0.5 \cdot 1 \quad x := 0 \quad Y(i, x) := \frac{d^2}{dx^2} X(i, x) \\
 T(i, t, T0, T10, F) &:= e^{-\mu_i t} \cdot \left[ T0_i \cdot \left( \frac{\mu_i}{\omega_i} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) + \cos(\omega_i \cdot t) \right) \dots \right] \dots \\
 &\quad + \frac{T10_i}{\omega_i} \cdot \sin(\omega_i \cdot t) \\
 &\quad + \frac{X(i, xF)}{m \cdot B_i \cdot \omega_i} \cdot \int_0^t F \cdot e^{-\mu_i(t-t_1)} \cdot \sin[\omega_i \cdot (t-t_1)] dt_1 \\
 T1(i, t, T0, T10, F) &:= \frac{d}{dt} T(i, t, T0, T10, F) \\
 d(t, F, d0, d10) &:= d0 + d10 \cdot t + \frac{g1 \cdot t^2}{2} - \frac{1}{M} \cdot \int_0^t F \cdot (t-t_1) dt_1 \\
 d1(t, F, d0, d10) &:= \frac{d}{dt} d(t, F, d0, d10)
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Фрагмент програми

**Приклад розрахунку**

Розглянемо боковий удар (горизонтальний удар, тоді у формулі (2)  $g = 0$ , тобто вага тіла не враховується) по середині сталевій консольній балці (рис. 1, б) довжиною  $l = 20,0$  см прямокутного поперечного перерізу  $1 \times 1$  см. Ударяє сталева куля, радіус якої  $1,0$  см, з початковою швидкістю  $1,0$  см/с.

Вибраний крок часу (крок інтегрування рівнянь)  $\tau$  дорівнює  $1/180$  періоду першого тону власних коливань балки. Сила  $F$  визначалася із точністю до 1 %. Під час визначення переміщень і напружень були враховані 12 форм коливань балки. Коефіцієнт розсіяння енергії  $\psi = 0,2$ .

Результати розрахунку наведено на рис. 3.

На рис. 3, а представлена сила контактної взаємодії між тілом і балкою  $F(t)$ .

На рис. 3, б – переміщення тіла  $d$ ; прогин перерізу балки, у якому відбувається удар,  $w_F$ ; величина цього прогину при статичному прикладанні навантаження  $w_F^{cm}$ ; прогин вільного кінця балки  $w_l$ .

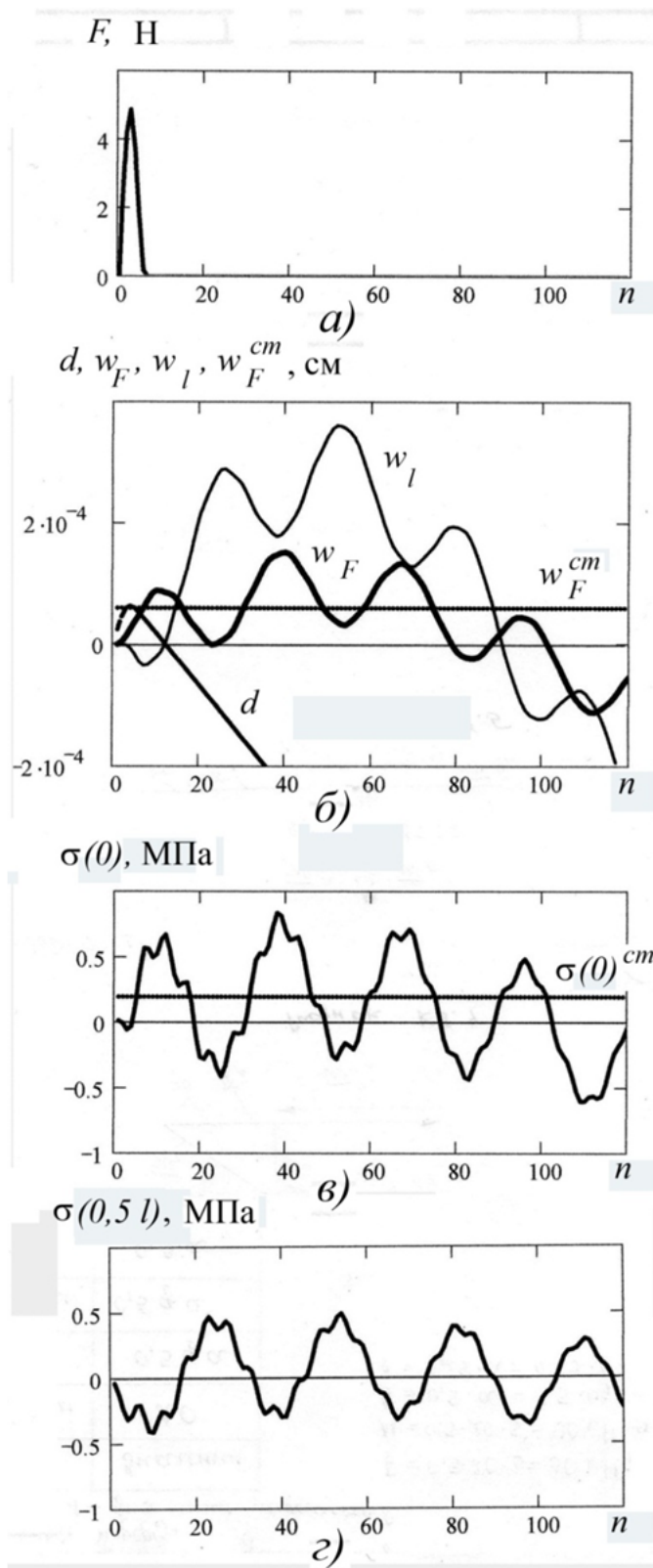


Рис. 3. Результати розрахунку

На рис. 3, в – напруження  $\sigma(0)$  на лівому кінці балки і напруження  $\sigma(0)^{cm}$  у цьому місці при статичному навантаженні балки.

На рис. 3, г – напруження  $\sigma(0,5l)$  у перерізі середини балки.

**Висновки.** Наведено розрахунки удару тілом по консольній балці. Це може бути цікавим з наукового погляду і корисним в інженерній практиці. Розрахунки проілюстрували нові можливості сучасної обчислювальної техніки. Але конструкція, до якої прикладається ударне навантаження, може бути суттєво складнішою. В цьому випадку рух конструкції зручно описувати, застосовуючи метод скінченних елементів. Для наведеного у цій роботі прикладу такі розрахунки були виконані та одержані результати. З одного боку, ці розрахунки перевірили правильність одержаних результатів. З іншого – застосування методу скінченних елементів розкриває широкі можливості для розрахунку досить складних конструкцій на різні види динамічних навантажень.

#### Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит ; пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лузина. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.
3. Грицюк В. Ю. Алгоритми чисельного розрахунку малих коливань механічних систем / В. Ю. Грицюк // Вісник Чернігівського держ. техн. ун-ту. – 2001. – № 12. – С. 43–46.

УДК 534.1:539.3

**О. В. Савченко**, канд. техн. наук

**О. Л. Деркач**, аспірант

**С. М. Ющенко**, аспірант

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

#### ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

**О. В. Савченко**, канд. техн. наук

**О. Л. Деркач**, аспірант

**С. М. Ющенко**, аспірант

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Olena Savchenko**, PhD in Technical Sciences

**Oleh Derkach**, PhD student

**Svitlana Yushchenko**, PhD student

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

#### DETERMINATION OF EFFECTIVE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE ELECTRO-VISCOELASTIC COMPOSITE MATERIALS

*Розглянуто дві методики визначення ефективних в'язкопружних, п'єзоелектричних та діелектричних динамічних характеристик композиційного матеріалу з п'єзоелектричними шарами. За першою методикою композиційна структура розглядається як квазіоднорідний матеріал з використанням гіпотез Фойхтга-Рейсса; за другою – проводиться чисельний аналіз ефективних характеристик композиційного макронеоднорідного матеріалу за допомогою методу скінченних елементів. Результати досліджень порівнюються.*

**Ключові слова:** п'єзоелектричний матеріал, композиційний матеріал, ефективні характеристики, декремент коливаний, метод скінченних елементів.

*Рассмотрено две методики определения эффективных вязкоупругих, пьезоэлектрических и диэлектрических динамических характеристик композиционного материала с пьезоэлектрическими слоями. По первой методике композиционная структура рассматривается как квазиоднородный материал с использованием гипотез Фойхтга-Рейсса; по второй – проводится численный анализ эффективных характеристик композиционного макронеоднородного материала с помощью метода конечных элементов. Проводится сравнение результатов исследования.*

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический материал, композиционный материал, эффективные характеристики, декремент колебаний, метод конечных элементов.

*Two methods for determining the effective viscoelastic, piezoelectric and dielectric dynamic characteristics of composite material with piezoelectric layers are considered. According to the first method composite structure is regarded as a quasi-*