

6. Kortusova, Iu. Iu. (2012). Osobennosti akreditatsii i ispytatelnoi laboratorii [Features and testing laboratory accreditation]. *Sovremennye nauchnye issledovaniia i innovatsii – Modern scientific researches and innovations*, no. 3. Retrieved from: <http://web.snauka.ru/issues/2012/03/10622> (in Russian).

7. Vavilov, V. P. (2010). Pessimisticheskiy aspekt teplovizionnogo energoaudita stroitelnykh sooruzhenii. *Defektoskopiia – Nondestructive Testing*, no. 12, pp. 49–54 (in Russian).

8. Vavilov, V. P., A. G. Klimov (2012). *Teplovizory i ikh primenenie [Imagers and their application]*. Moscow: Intel universal, p. 88 (in Russian).

9. Konstruktsii budynkiv i sporud. Teplova izoliatsiia budivel [Constructions of buildings and structures. Thermal insulation of buildings]. (2006). *DBN V.2.6-31:2006 from 9<sup>th</sup> September – 2006*. Kyiv: Minbud Ukrainy, p. 65 (in Ukrainian).

**Сахно Євген Юрійович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри управління якістю та проектами, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернігів, 14034, Україна).

**Сахно Евгений Юрьевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой управления качеством и проектами, Черниговский национальный технологический университет (ул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернигов, 14034, Украина).

**Sakhno Yevhen** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of Quality and Project Management, Chernihiv National University of Technology (4 Bielova Str., room 211 (building 23), 14034 Chernihiv, Ukraine).

**E-mail:** kafUYAP@ukr.net

**Двоєглазова Марина Валеріївна** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри управління якістю та проектами, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернігів, 14034, Україна).

**Двоєглазова Марина Валерьевна** – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры управления качеством и проектами, Черниговский национальный технологический университет (ул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернигов, 14034, Украина).

**Maryna Dvoieglazova** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department Quality and Project Management, Chernihiv National University of Technology (4 Bielova Str., room 211 (building 23), 14034 Chernihiv, Ukraine).

**E-mail:** maryna.dvoieglazova@gmail.com

**Ітченко Дмитро Миколайович** – кандидат технічних наук, викладач кафедри управління якістю та проектами, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернігів, 14034, Україна).

**Ітченко Дмитрий Николаевич** – кандидат технических наук, преподаватель кафедры управления качеством и проектами, Черниговский национальный технологический университет (ул. Белова, 4, каб. 211 (корп. 23), м. Чернигов, 14034, Украина).

**Itchenko Dmytro** – PhD in Technical Sciences, Lecturer of Department of Quality and Project Management, Chernihiv National University of Technology (4 Bielova Str., room 211 (building 23), 14034 Chernihiv, Ukraine).

**E-mail:** itchenko@list.ru

УДК 519-7:577.4:577.1

*Виктория Дубровская, Андрей Переварюха, Инна Соловьёва*

## **КРИЗИС ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОПУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И ВАРИАНТЫ ЕЕ КОРРЕКТИРОВКИ**

*Вікторія Дубровська, Андрій Переварюха, Інна Соловійова*

## **КРИЗИС ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ ПОПУЛЯЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ І ВАРІАНТИ ЇЇ КОРЕГУВАННЯ**

*Victoriia Dubrovskaia, Andrey Perevariukha, Inna Soloveva*

## **THE CRISIS IN THE SIMULATION TECHNOLOGY OF POPULATION PROCESSES AND OPTIONS FOR ITS CORRECTION**

*Рассмотрены аспекты, когда незначительные факторы, такие как непостоянство знака третьей производной функции воспроизводства, приводят к иному описанию реакции популяции при промышленном воздействии. Рыбопромышленные модели генерируют ряд нестационарных режимов, которые не когерентны статистике о критических ситуациях коллапсов запасов. Порядок переходов между периодами теоремы Шарковского не соответствует происходящим сдвигам в цикличности размножения арктических популяций. Пилообразные всплески аperiodической динамики в инвазионных гидробионтов отличаются от универсального сценария образования канторовского хаотического аттрактора, так как предполагают чередование стационарной и нерегулярной фазы с существенно превышающей амплитудой. Для описания качественных пороговых состояний биосистем предложено направленно реализовывать нелинейные эффекты с использованием функционалов ограниченного действия. Наличие субпопуляционных группировок существенно влияет на анализ промышленной статистики при прогнозировании восстановления запасов. Вклад локальных групп в эффективность воспроизводства не эквивалентен при сравнимой численности, что обсуждается при сравнении влияния репродуктивной изоляции на примере четных/нечетных стад горбуши и волжских популяций осетра.*

**Ключевые слова:** модели популяций, циклы, эффект Олли, репродуктивная изоляция, субпопуляции рыб.

**Рис.:** 9. **Библ.:** 19.

*На прикладі порівняння реальних ситуацій з можливими режимами поведінки відомих популяційних моделей за даними спостережень виділено невідповідності, які не можна усунути простим перевизначенням параметрів. Виникнення циклів періодів ступеня 2 під час бифуркації подвоєння передбачає принципово інший порядок обходу точок циклу, ніж у виражених циклах арктичних популяцій. Спостережувані спалахи аperiodичної динаміки у комах шкідників відрізняються від відомого сценарію хаотизації, який, крім канторівського аттрактора, припускає додаткові властивості у русі траєкторії, що важко інтерпретувати біологічно. Запропоновано для досягнення якісної відповідності проводити цільову реалізацію з'ясованих нелінійних ефектів з використанням тригерних функціоналів. Облік здавався б незначного фактора, що виражається в додатковій точці перегину кривої відтворення, може прив-*

©Дубровська В. А., Переварюха А. Ю., Соловійова І. В., 2016

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

сти до інших висновків про властивості популяційної динаміки. Аналіз промислової статистики для моделей повинен враховувати наявність субпопуляційних угруповань. Вплив репродуктивної ізоляції локальних груп проаналізовано на прикладі даних нересту парних/непарних стад горбуші і вольських популяцій російського та перського осетра.

**Ключові слова:** моделі популяцій, цикли, ефект Оллі, репродуктивна ізоляція, субпопуляції риб.

Рис.: 9. Бібл.: 19.

The article by comparing the actual situation with the possible modes of behavior known population models from observational data identified a number of inconsistencies that can not be removed by a simple redefinition of the parameters. The origin of cycles of periods 2 degree at doubling bifurcation involves a fundamentally different points of the tab order than the pronounced cycles of Arctic populations. We observed flashes aperiodic dynamics of insect pests differs from the well-known scenario of chaos, which in addition to Cantor attractor involves a number of additional properties in the motion path that is difficult to interpret in biology. It is proposed to achieve the quality of conformity carried out the implementation of the price explainable nonlinear effects with the use of trigger functional. Accounting for seemingly minor factor, which is expressed in an additional point of inflection reproduction can lead to other conclusions about the properties of population dynamics. Analysis of catch statistics for the models must take into account the presence of subpopulation groups. Influence of reproductive isolation of local groups discussed the example of these spawning odd / even flocks of pink salmon populations and for the Caspian Sea russian and persian sturgeon *Acipenser persicus*.

**Keywords:** population models, cycles, bifurcation, Allee effect, reproductive isolation, fish subpopulations.

Fig.: 9. Bibl.: 19.

**Введение.** Дискретные модели популяций имеют ограниченный набор возможностей изменения поведения, три вида бифуркаций и три топологических типа аттракторов, потом для нас не выглядят удивительно, что они редко находят опытное подтверждение в лабораторных исследованиях. Предложено достаточное число популяционных моделей (в том числе разрабатываемых нами), так что на современном этапе вопрос ставится не об оригинальности, а о мере их связи с наблюдениями. В философско-методической монографии [1] практические перспективы моделей охарактеризованы так: «Либо они просто не адекватны и практически бесполезны для развития теоретической биологии, либо полученные с их помощью биологические результаты тривиальны». Насколько выбранные задачи для применения математических моделей в нефизических областях науки исходили из завышенных ожиданий? Большинство математиков игнорируют подобные выпады, хотя проблемы обозначились очень давно, после того как в ряде экспериментов не удалось получить циклические колебания, предсказанные известной из учебников моделью «хищник-жертва». Предоставленные своей судьбе лабораторные популяции жертв исчезали. Флуктуации численности удалось увидеть в экспериментах с паразитическими осаами и зерновками, т. е. имеющей принципиальные отличия системе «паразит-хозяин», и опытах с популяцией *Tribolium castaneum* [2], где роль хищничества выполняет каннибализм в отношении преимагинальных стадий хрущака. Незатухающие колебания носили сложный аperiodический характер, что привело авторов экспериментов к мнению о нереальности описания такой динамики системой ОДУ.

После открытия сложного поведения функциональных итераций и в последующем «универсальности Фейгенбаума» некоторое время было популярно направление, где старались получить как можно более диковинный облик асимптотического множества траектории. В околораспространенном контексте рассматривались сюрреалистические фазовые портреты, обязательно обладавшие положительными ляпуновскими показателями. Наш опыт показывает, что в современной ситуации регулярных последствий нерационального промысла для моделей, претендующих на биологическое обоснование, требуется выработка критериев и меры реалистичности. Мы не будем вслед за профессором Тутубалиным предаваться философскому скептицизму, но рассмотрим на ряде примеров неочевидные нарушения соответствия популяционной динамике режимам поведения траектории функциональных итераций и предложим некоторые методики корректировки для моделей репродуктивного процесса.

**Состояние объекта и его наблюдения.** Если имеются данные и уже существует модель, разработанная на основе явных представлений о причинно-следственных связях в развитии процесса, то возникает задача настройки модели согласно имеющимся данным. Однако данные были получены об объекте, находящемся в определенном состоянии и испытывающим внешнее, как говорят «управляющее» воздействие. Если объект не лабораторная популяция, и мы не можем произвольно управлять её состоянием, то хорошо бы точно знать тип состояния, в котором находился объект. Еще лучше, чтобы во время наблюдений состояние не менялось.

Обратимся к работам по исследованию формирования пополнения популяций рыб. Основополагающие работы в этой области моделирования изначально отличались большей практической направленностью (особенно заметно отличие от вольтеровских моделей), так как они основывались на имеющихся данных по различным популяциям, которые приводятся в виде графиков. После появления известных моделей Рикера, Кушинга или Бивертон-Холта, формализующих компенсационную, зависящую от плотности смертности молодых рыб, нужно было разработать методы для настройки параметров по данным. Было много усилий в этом направлении. Основные работы ихтиологов публиковались до того, как были сделаны фундаментальные открытия в динамике итераций. Рикер не имел понятия о теории бифуркаций, но интуитивно понимал, что возникновение циклов зависит от наклона его эмпирической кривой.

Можно сказать, что подобные двухпараметрические модели не так сложны, однако они могут включаться в состав объемных многокомпонентных моделей ихтиоценозов, как например В. В. Канторина для омуля оз. Байкал [3], В. В. Михайлова, Ю. С. Решетникова для сига оз. Севан [4], и в качестве ведущих нелинейных членов в действительности определять их качественное поведение. В разработке модели водного сообщества в [5] бифуркационным параметром для длиннопериодических колебаний оказался рост скорости накопления биомассы зоопланктона.

Задаче подбора значений параметров посвящен один из разделов методической монографии Рикера [6], где предложены все возможные способы оценки. Для построения кривых воспроизводства предлагались сложные преобразования исходных данных наблюдений. Исследователи склонны проявлять изобретательность, когда ставят цель подтвердить их теоретические предположения. Рикер логарифмировал предложенную им функцию вычисления пополнения  $R$  от запаса  $S$ :  $\ln R - \ln S = \ln a - bS$ .

Далее строил кривую с использованием регрессии  $\ln R/S$  на  $S$  для геометрической и арифметической средней, как показано на рис. 1. для норвежской трески *Gadus morhua* L., но ни одна из линий регрессии на этом графике не отвечает опытным данным. Однако, если прочертить траекторию, то станет видно, как популяция под воздействием какого-то важного фактора после 1948 г. переместилась из устойчивого стационарного состояния в неустойчивое равновесие. Эффективность воспроизводства после 1949 г. резко падала, потом столь же резко возросла, описав петлю, вышла к минимальному за время наблюдения значению. Далее запас биоресурсов потерял промышленное значение на несколько лет (ряд данных заканчивается 1960 г.), подобное часто наблюдалось с треской и даже мойвой в норвежских водах.

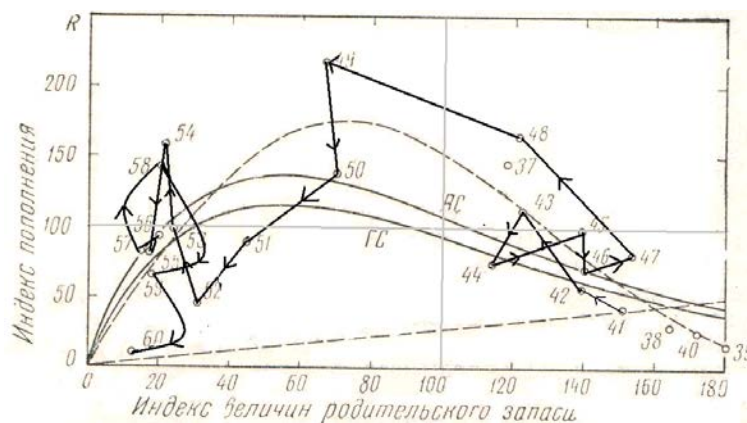


Рис. 1. Поиск эфемерной зависимости методом регрессий в [6]

На графиках рис. 1 искалась куполообразная кривая, но реальная зависимость с такой динамикой выглядит сложнее. Мы предложили альтернативную модельную зависимость родительского запаса и восполнения ситуации промысла трески (рис. 2).

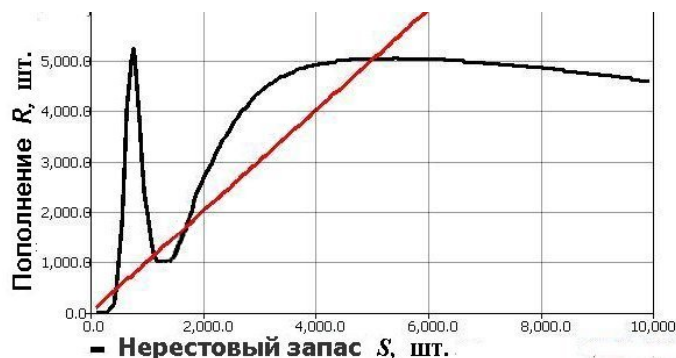


Рис. 2. Модельная зависимость с пиком и пологим куполом

Кривая с двумя экстремумами-максимумами, один из которых образует пологий купол и содержит притягивающую стационарную точку, а другой – резкий пик между нетривиальными стационарными точками равновесия. Положение минимума может определяться дополнительными внешними факторами, вызывающими масштабирование кривой вдоль оси ординат, когда вероятен сценарий притяжения траектории к тривиальному равновесию, т. е. потере промышленного значения.

Трудно предложить общую методику анализа статистики наблюдений за популяцией, рассматриваемой как естественная динамическая система, но находящейся за период наблюдений в различных режимах изменения состояния, например после селективного перелова. Обсуждение реальных наблюдений по теории формирования пополнения показывает, что проявление искомой зависимости гораздо в большей степени свойственно анадромным рыбам. Успех нереста трески сильно зависит от климатических условий. Осетровые и лососевые рыбы отличаются по продолжительности жизненного цикла, но сходны по экологическим условиям миграции на ограниченные по площади пригодные пресноводные нерестилища.

**Дифференциация данных наблюдений.** Другой замечательный пример попытки построения кривой воспроизводства Рикера по детерминированным данным на рис. 3 интересен с точки зрения нелинейной хаотической динамики [7]. По оси абсцисс запас, по ординат – пополнение и очень разумно оставлены даты, соответствующие значениям на графике. Обратим внимание, что точки в плоскости запас×пополнение лежат точно по стрелкам траектории, проведенным нами от биссектрисы координатного угла геометрического места стационарных точек, так как это данные о численности тихоокеанской горбуши *Oncorhynchus gorbuscha* с двухлетним циклом в четные годы.

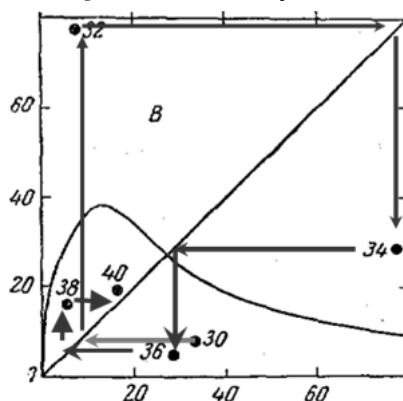


Рис. 3. Аппроксимация аperiodической траектории флуктуаций горбуши

У лососёвых рыб существуют репродуктивно изолированные «четные» и «нечетные» стада, которые приходят на нерест в реки соответственно в четные и нечетные годы, фактически размножающиеся отдельно популяции, взаимно конкурирующие за

пищу в море. Численность четных и нечетных стад может значительно отличаться и в некоторых нерестовых реках одного из стад горбуши может не быть совсем. Объединенные данные учета обоих стад, взятые просто из отчетов промысла, могли совершенно не демонстрировать интересной динамики. Для горбуши одного из стад отмечаются резкие изменения численности производителей. По траектории мы предположим, что зависимость неунимодальная, но нет нетривиальной стационарной точки левее пика, ветвь кривой лежит ниже биссектрисы, и более того все возможные стационарные точки возле пика неустойчивы.

Динамика системы начиная с точки 1930 г. по имеющимся данным в строгом смысле аperiodическая. Аperiodическая динамика может реализовываться за счет интервального аттрактора, третьего типа по классификации предельных асимптотических множеств для итерационных систем Дж. Гукенхаймера. Однако нарисованная аппроксимационная кривая обладает единственной стационарной точкой пересечения с биссектрисой, которая, судя по приведенному графику, должна быть устойчивой под действием итераций, так как наклон касательной к кривой в точке пересечения меньше  $\pi/4$ , а значение производной в стационарной точке есть критерий её устойчивости. Колебаний с большой амплитудой такая кривая предсказывать не может, так как точки должны были бы группироваться в некотором ограниченном радиусе от биссектрисы координатного угла или демонстрировать стягивание, т. к. точка «34» отображается прямо на пересечении с биссектрисой, но не удерживается там.

**Противоречивость бифуркаций.** В [7] не сказано, что параметры моделей не равноценны по значимости при рассмотрении их влияния на структуру фазового портрета динамической системы. В предыдущей работе [8] отмечали бифуркационные изменения поведения модели Рикера, но в действительности эти свойства относятся к целому классу дискретных отображений, к которому относится и проведенная на рис. 3 аппроксимационная кривая. К тому же типу отображений относится и модель Дж. Шепарда, но модель Бивертон-Холта имеет совершенно другое качественное поведение без циклов. Данные о четной популяции горбуши заставляют усомниться в том, что для нее существует зависимость пополнения и запаса с единственным максимумом, так как динамика точек не характерна даже для случая образования хаотического аттрактора в результате накопления каскада удвоенных циклов.

В моделях Рикера и Шепарда существует возможность появления при бифуркациях циклов всех степеней 2, в результате бесконечного каскада таких удвоений поведение траектории хаотизируется. Но трактовка параметров, при увеличении которых происходят бифуркации удвоения периода, в этих двух моделях диаметрально противоположна. На рис. 4. цикл из четырех периодических точек модели Рикера, между двумя верхними и нижними точками были раздвоившиеся точки, но порядок обхода из верхней ветви в нижнюю и обратно сохраняется при всех удвоениях.

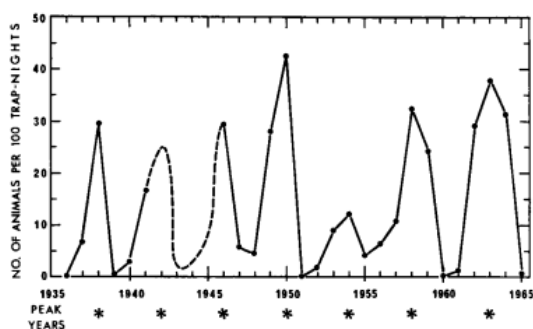


Рис. 5. Реальная 4-летняя цикличность популяции полевки из [10]

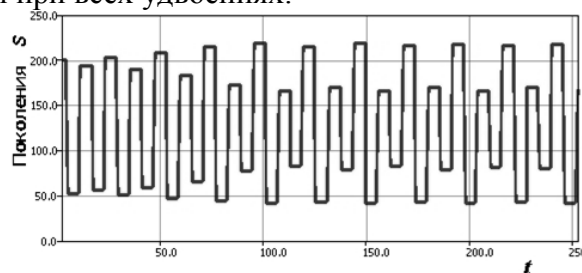


Рис. 4. Цикл периода  $2^2$ , возникший в модели Рикера

Обнаружение универсального характера образования циклов было воспринято с позитивной стороны подтверждением предсказатель-

ных возможностей таких моделей для популяций с перекрывающимися поколениями, начиная с работ Р. Мэя [9], и такое мнение продолжает доминировать среди математиков. Цикличность свойственна ряду природных популяций. Особенно выражены циклические изменения численности у грызунов субарктической зоны. Помимо длины периода, циклы различаются взаимным расположением точек, и как мы видим у полевки *Myodes rufocanus* рис. 5 это монотонные перестановки на возрастание с явным пиком в конце 4-летнего периода, и в конце сдвиг к 5-летнему, звездочками отмечены годы мышиных пиков.

Согласно модельным циклам периода  $2^n$  не будет периодов депрессии и резких переходов к обилию грызунов, а симметричные колебания вокруг бывшего равновесия.

Для некоторых стад лососевых свойственны длиннопериодические циклические колебания с постепенным приближением к наибольшим значениям (рис. 6). В отличие от грызунов мы видим постепенное снижение после пиковых значений.

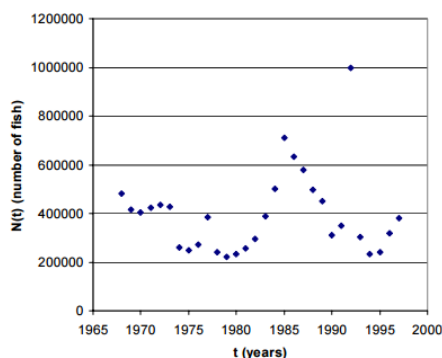


Рис. 6. Годовая численность лосося в Британской Колумбии

В дискретных итерациях получить такую динамику проблемно. Нами предложен способ дополнять правые части дифференциальных уравнений убыли поколений непрерывно-событийной вычислительной системы специальными триггерными функционалами. Краткое включение действие функционала редуцирует «по ходу» число стационарных точек. В разработанной нами модели удалось описать ситуацию вспышки численности австралийской псиллиды – вредителя эвкалиптов рис. 7 из [11].

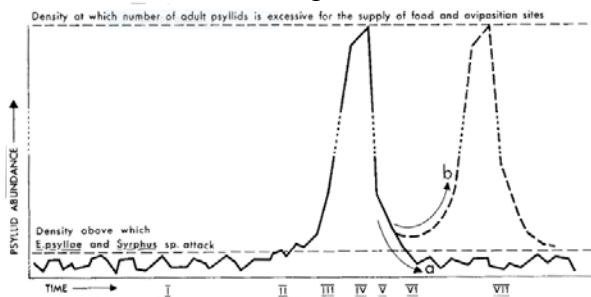


Рис. 7. Сценарий вспышки эвкалиптовой псиллиды по Кларку

В имеющей два пороговых состояния имитационной модели повторяющихся вспышек вредителя, вызывающих дефолиацию леса, после обратной касательной бифуркации траектория будет резко падать в режим малочисленных колебаний рис. 8.

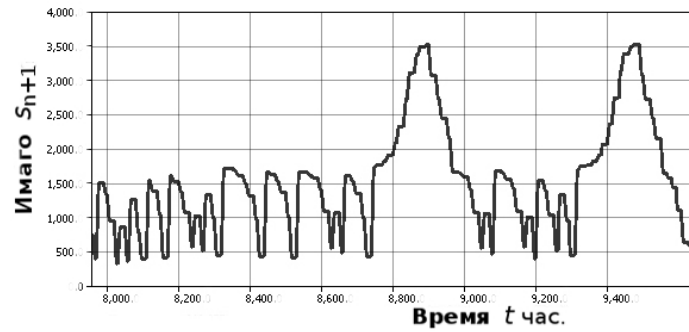


Рис. 8. Модельная динамика повторяющихся всплесков псиллиды

Необычную динамику медленного скольжения с пиковых значений на рис. 6 мы можем объяснить тем, что ряд данных включает все виды лососевых рыб. Мы имеем наблюдения не о настоящей популяции, а о наборе репродуктивно изолированных в реальности групп, для которых помимо конкуренции свойственен каннибализм [12].

**Предлагаемые критерии.** Будем рассматривать отображение класса гладкости  $C^2$  отрезка прямой  $R^1$  в себя задаваемой функцией  $f(x)$ , которая будет интерпретироваться, как связь между нерестовым стадом и образовавшимся пополнением у рыб непрерывно сменяющимися поколениями. Пусть неподвижная точка отображения зависит от нескольких параметров:  $x^* = x^*(a, b)$ , но  $f'(x^*) = p(a)$ ,  $f'(x) \neq 0$  если  $x \neq c$ ,  $f''(c) \neq 0$  и пусть для  $f(x; x \neq c)$  всюдуопределен дифференциальный инвариант Шварца:

$$S_f = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

В случае функции Рикера имеем:  $f'(x) = ae^{-bx}(1-bx)$ ,  $f''(x) = abe^{-bx}(bx-2)$ , третья производная  $f'''(x) = ab^2e^{-bx}(3-bx)$  и  $n$ -порядка:  $f^{(n)}(x) = a(-1)^n b^{n-1} e^{-bx}(bx-n)$ .

Оценим знак шварциана, сохраняющийся для всех,  $f(f(\dots(x)\dots)) \equiv f^n(x)$ :

$$S_f = b^2 \frac{-b^2 x^2 + 4bx - 6}{2(1-bx)^2} \text{ и очевидно } S_f < 0 \text{ для } x \in \mathcal{R}.$$

Стационарная точка функции Рикера зависит от двух параметров:  $x^* = \ln a / b$ , но критерий устойчивости однопараметрическая функция  $x^*$  теряет устойчивость при  $f'(x^*) = -1$  критерий устойчивости:  $f'(x^*) = 1 - \ln a$ . При  $a = e^2$ ,  $f'(x^*) = -1$  наблюдается следующая ситуация для второй итерации  $f^2(x)$  в теряющей устойчивость точке  $x^*$ :

$$\frac{df^2(x^*)}{dx} = 1, \quad \frac{d^2 f^2(x)}{dx^2} = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x),$$

$$\frac{d^2 f^2(x^*)}{dx^2} = f'(x^*)f''(x^*)(f'(x^*) + 1) = 0.$$

И шварциан:  $S_{f^2(x^*)} = \frac{d^3 f^2(x^*)}{dx^3}$ , так как известно  $S_{f^2} < 0$ , а следовательно  $df^2(x)/dx$  при  $a = e^2$  имеет в  $x^*$  локальный максимум и так происходит бифуркация, появляются устойчивые циклические точки, являющиеся стационарными точками для второй итерации. Отрицательный знак шварциана служит критерием для возможности реализации бесконечного каскада бифуркаций удвоения периода цикла. Более того, это является следствием фундаментальной теоремы Д. Сингера [13], доказавшего, что

отображение унимодальной функции с отрицательным  $S_f < 0$  (критерии Сингера) может иметь не более одной устойчивой траектории и эта траектория является ω-предельным множеством для критической точки  $c: f'(c) = 0$ .

Предложенная Рикером биологическая модель с математической точки зрения классифицируется как  $SU$ -отображение, для которого выполняются условия теоремы Д. Сингера. Модель Рикера отличается от объектов, которые исследовались Фейгенбаумом и в других работах, по универсальности (обычно квадратичного полинома) наличием точки перегиба  $f''(x_s) = 0, x_s = 2/b$  и точек, где обращаются в ноль старшие производные  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$ , означает, что хаотический аттрактор может увеличиваться неограниченно, так как не возникнет такого явления, как граничный кризис аттрактора.

Не относятся к данному классу отображений дискретно-непрерывная модель, предложенная нами в [8] для анализа порогового эффекта в воспроизводстве истощенного промыслом каспийского осетра. Отметим, что сложная, выявленная нами, зависимость может объясняться тем, что в данных учета объединены данные по двум видам – русскому и персидскому осетру. В природе для этих морфологически близких видов существует температурная изоляция, выражающаяся в разных сроках нереста.

Для незнакопостоянности инварианта  $S_f$  достаточно получить зависимость с двумя точками  $c_1, c_2$ , такими что  $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$ . Нарушение критериев Сингера совсем не означает, что динамика итераций зависимости обязательно будет тривиальной.

Иногда более успешно применяются виды зависимостей казалось бы не соответствующие наблюдаемой форме расположения точек на графике, так в [14] отмечается, что данные по уловам сибирского осетра в верховьях Оби приводят к куполообразной форме кривой с плоской вершиной, но выбрана автором [14] и используется модель Бивертон-Холта – дуга гиперболы. В интересной работе [15] о прогнозировании достаточно парадоксального увеличения эффективности воспроизводства камчатского кижуча лучшее соответствие показала альтернативная модель теории формирования пополнения Шепарда:  $f(x) = ax \left(1 + (x/K)^b\right)^{-1}$ , где  $a > 1$  интерпретируется аналогично модели Рикера,  $K$  так же, как и в известном дифференциальном уравнении П. Ферхюльста: лимитирующий фактор ограниченной емкости среды, степень воздействия которого определяются показателем  $b$ . Модель претендовала на универсальность в теории зависимости запаса и пополнения рыб [16].

Модель Шепарда с точки зрения теории бифуркаций отображений на  $R^1$ :

$$x^* = K \sqrt[b]{a-1}, \frac{df(x)}{dx} = \frac{(K^b + x^b)aK^b - ab(Kx)^b}{(K^b + x^b)^2},$$

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \frac{a - ba + b}{a} > 0 \text{ при } b < 1.$$

Теория универсальности нелинейных систем разработана только для однопараметрического случая [17]. В ограниченном диапазоне значений параметра  $a$ , имеющих смысл, бифуркации удвоения периода возникают при изменении показателя степени  $b \gg 1$ . При  $b < 1$  критических точек нет, при  $b = 2$  функция имеет критическую точку  $x = K$ . Вторая производная в критической точке:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{a}{4K},$$

и функция имеет максимум при данных условиях. В случае модели Шепарда мы имеем сложную параметрическую зависимость для аналитического анализа бифуркаций и так



ихтиологическая практика ставит проблемы для математики. Оценка и поиск хаотических свойств в биосистемах стала отдельным направлением [18].

Сущностная *популяционная интерпретация* нелинейных эффектов в моделях Рикера и Шепарда оказывается прямо противоположной. Рассмотрев изменение поведения модели Рикера, можно сформулировать следующую гипотезу:

Параметр  $a$  характеризует репродуктивный потенциал, а это для популяций стабильная величина, плодовитость биологических видов имеет эволюционно сложившееся значение, и непонятен вопрос: почему она должна резко увеличиваться, т. е. происходить переход от  $K$ -стратегии выживания к  $r$ -стратегии? Скорее возможен случай вынужденного уменьшения средней популяционной плодовитости из-за селективного вылова быстро растущих рыб, когда преимущество при оставлении потомства получают тугорослые генетические формы.

Возможен вариант, когда популяция способна генерировать дополнительное поколение, размножаться не два, а три раза. Подобное отмечается для насекомых и грызунов. Но данный случай нельзя просто описать увеличением репродуктивного параметра, нужно пересмотреть модельные сроки жизненного цикла. Флуктуации свойственны не только видам с большой индивидуальной плодовитостью, так называемым  $r$ -стратегам. В Национальном парке Крюгера решено держать численность популяции слонов в 7000, равновесной по подсчетам экологов для среды. Добиться теоретически предсказанной стабилизации не удастся и постоянно приходится бороться флуктуациями численности (рис. 9), отстрелами проводить прореживание, так как считается, что слоны начинают серьезно повреждать растительность [19].

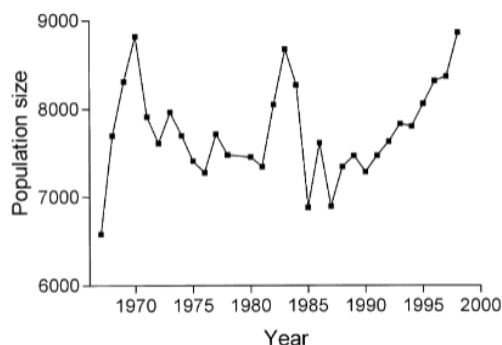


Рис. 9. Динамика численности слонов в парке Крюгера

В модели Шепарда появление циклов периода  $2^n$  происходит при увеличении степени действия лимитирующих факторов среды. Можно предположить, что одна из двух моделей принципиально неадекватна, либо заключить, что каскад бифуркаций и ряд других сложных нелинейных эффектов (окон периодичности, перемежаемости, внутреннего кризиса хаотического аттрактора) для  $SU$ -отображений не имеет сущностной популяционной интерпретации. Отсюда следующее предложение, что функциональная зависимость, соответствующая условиям теоремы Сингера, будет выходить за пределы применимости в популяционной динамике при непредсказуемых интервалах значений модельных параметров.

**Заключение.** Модель функциональной зависимости вида «запас-пополнение» не должна сохранять знакопостоянный шварциан, т. е. не должно происходить удвоений до бесконечного периода. Полагаем для практических случаев достаточно цикла периода  $2^2$ , а критерием служат две точки перегиба. Более сложные виды колебаний можно рассматривать как вложение циклов. Так на графике динамики полевки мы видим численность, подсчитанную осенью, но при этом полевки могут продуцировать не единственное поколение за сезон. Так как одно поколение оказывается зимующим, то целе-

## TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

сообразно рассматривать динамику различных поколений разными зависимостями. Композиционная зависимость в виде  $f_1(f_2(S))$  получит незнакопостоянный шварцман.

Для случая с осетром Каспия нам было важно рассмотреть в модели воспроизводства ситуацию приближения к минимальной для выживаемости численности нерестового стада, но как оказалось, подобные зависимости будут иметь и другие отличия динамики. Можно выдвинуть критерии, при соблюдении которых модель сохранит адекватность, если рассмотреть известный в популяционной биологии эффект Олли применительно к удельной скорости роста и дать интерпретацию величине  $y = df(x)/dx$ . Предложим условия, накладываемые на производную: не должна быть унимодальной функцией, а именно:  $y(x)$  должна достигать максимума на промежутке  $(0,c)$ ; иметь минимум на промежутке  $(c,d)$ , где  $y(c) = 0$ ,  $y(d) < 0$ ; иметь горизонтальную асимптоту  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ . Таким образом, учет проявления на графике действия эффекта

Олли, выражающегося в непропорциональном падении эффективности воспроизводства относительно сокращающегося нерестового запаса, практически расширит рамки возможности интерпретации результатов вычислительного моделирования. В качестве перспективного направления можно расценивать генетическое разнообразие популяции, например, когда скорость роста рыб связана с частотой встречаемости одного из альтернативных аллельных генов.

**Поддержка.** Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-37-00028 для молодых ученых «Разработка непрерывно-событийной вычислительной модели эффективности воспроизводства каспийской севрюги в условиях неопределенности репродуктивной изоляции субпопуляционных группировок».

## Список использованных источников

1. *Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ* / В. Н. Тутубалин и др. – М. : Языки русской культуры, 1999. – 208 с.
2. *Experimentally induced transitions in the dynamic behavior of insect populations* / R. F. Costantino et al. // *Nature*. – 1995. – Vol. 375. – P. 227–230.
3. *Контторин В. В.* Математическое моделирование популяции байкальского омуля / В. В. Контторин. – М., 1980. – 208 с.
4. *Михайлов В. В.* Имитационная модель рыбной части сообщества озера Севан / В. В. Михайлов, Ю. С. Решетников // *Проблемы автоматизации научных и производственных процессов*. – Л. : Наука, 1985. – С. 56–61.
5. *Долгопериодные* эндогенные колебания численности популяций рыб / А. Е. Бобырев и др. // *Математическое моделирование. Биофизика*. – 2013. – Т. 58, № 2. – С. 334–348.
6. *Рикер У. Е.* Методы оценки и интерпретация биологических показателей популяций рыб / У. Е. Рикер. – М. : Пищевая промышленность, 1979. – 408 с.
7. *Ricker W. E.* Two mechanisms that make it impossible to maintain peak period yields from stocks of Pacific salmon and other fishes / W. E. Ricker // *J. of the Fisheries Research Board of Canada*. – 1973. – Vol. 30. – P. 1275–1286.
8. *Переварюха А. Ю.* Нелинейные эффекты и проблемы интерпретации в моделировании управляемых биологических процессов / А. Ю. Переварюха // *Технические науки и технологии*. – 2012. – № 3. – С. 166–176.
9. *May R. M.* Qualitative Stability in Model Ecosystems / R. M. May // *Ecology*. – 1973. – Vol. 54. – P. 638–641.
10. *Krebs C. J.* Population Cycles in Small Mammals / C. J. Krebs, J. H. Myers // *Advances in Ecological Research*. – 1974. – Vol. 8. – P. 267–399.
11. *Clark L. R.* The population dynamics of *Cardiaspina albixtatura* (Psyllidae) / L. R. Clark // *Australian Journal of Zoology*. – 1964. – Vol. 12, № 3. – P. 362–380.
12. Гришин В. Н. Современные проблемы пресноводной аквакультуры / В. Н. Гришин. – М. : РУДН, 2008. – 138 с.
13. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval / D. Singer // *SIAM journal of applied math*. – 1978. – Vol. 35. – P. 260–268.
14. *Журавлев В. Б.* К методике изучения численности популяций редких и исчезающих видов рыб / В. Б. Журавлев // *Вестник Новосибирского государственного аграрного университета*. – 2012. – Т. 2, № 23. – С. 20–27.
15. *Фельдман М. Г.* Прогнозирование подходов лососевых (на примере кижуча западной Камчатки) с использованием моделей экстраполяции временных рядов и моделей «запас-пополнение» / М. Г. Фельдман, Е. А. Шевляков, Ж. Х. Зорбиди // *Исследования водных биологических ресурсов Камчатки и северо-западной части Тихого океана*. – 2014. – № 34. – С. 87–106.
16. *Sheperd J.G.* A versatile new stock-recruitment relationship for fisheries, and the construction of sustainable yield curves / J. G. Sheperd // *J. Cons. Intern. Explor. Mer.* – 1982. – V. 40. – P. 67–75.
17. *Collet P.* Universal properties of maps of an interval / P. Collet, J. Eckmann, O. E. Lansford // *Gomm. Math. Phys.* – 1980. – Vol. 76, № 3. – P. 211–254.
18. *Шелудько А. С.* Алгоритм гарантированного оценивания параметра одномерного хаотического отображения / А. С. Шелудько, В. И. Ширяев // *Информационные технологии*. – 2015. – № 1. – С. 30–34.

19. Aarde R. van. Culling and the dynamics of the Kruger National Park African elephant population / R. van Aarde et al. // *Animal Conservation*. – 1999. – Vol. 2. – P. 287–294.

#### References

1. Tutubalin, V. N. et al. (1999). *Matematicheskoe modelirovanie v ekologii: istoriko-metodologicheskii analiz* [Mathematical modeling in ecology: historical and methodological analysis]. Moscow: Iazyki russkoi kultury, 208 p. (in Russian).
2. Costantino, R. F. et al. (1995). Experimentally induced transitions in the dynamic behavior of insect populations. *Nature*, vol. 375, pp. 227–230.
3. Kontorin, V. V. (1980). *Matematicheskoe modelirovanie populiatcii baikalskogo omulia* [Mathematical modeling of the population of Baikal omul]. Moscow, 208 p. (in Russian).
4. Mikhailov, V. V., Reshetnikov, Iu. S. (1985). *Imitacionnaia model rybnoi chasti soobshchestva ozera Sevan* [A simulation model of fish communities of Lake Sevan]. *Problemy avtomatizatsii nauchnykh i proizvodstvennykh protsessov – Problems of automation of scientific and production processes*. Leningrad: Nauka, pp. 56–61 (in Russian).
5. Bobyrev, A. E. et al. (2013). *Dolgoperiodnye endogennye kolebaniia chislennosti populiatcii ryb*. *Matematicheskoe modelirovanie* [Long-period oscillations in fish population size. Mathematical modeling]. *Biofizika – Biophysic*. Moscow, vol. 58, no. 2, pp. 334–348 (in Russian).
6. Riker, U. E. (1979). *Metody otchenki i interpretatsiia biologicheskikh pokazatelei populiatcii ryb* [Computation and interpretation of biological statistics of fish populations]. Moscow: *Pishchevaia promyshlennost – Food Industry*, 408 p. (in Russian).
7. Ricker, W. E. (1979). Two mechanisms that make it impossible to maintain peak period yields from stocks of Pacific salmon and other fishes. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, vol. 30, pp. 1275–1286.
8. Perevariukha, A. Iu. (2012). *Nelineinye efekty i problemy interpretatsii v modelirovanii upravliaemykh biologicheskikh protsessov* [Nonlinear effects and interpretation problem in the modeling of controlled biological processes]. *Tekhnicheskie nauki i tekhnologii – Technical sciences and technologies*, no 3, pp. 166–176 (in Russian).
9. May, R. M. (1973). Qualitative Stability in Model Ecosystems. *Ecology*, vol. 54, pp. 638–641.
10. Krebs, C. J., Myers, J. H. (1974). Population Cycles in Small Mammals. *Advances in Ecological Research*, vol. 8, pp. 267–399.
11. Clark, L. R. (1964). The population dynamics of *Cardiaspina albitextura* (Psyllidae). *Australian Journal of Zoology*, vol. 12, no. 3, pp. 362–380.
12. Grishin, V. N. (2008). *Sovremennye problemy presnovodnoi akvakultury* [Current problems of freshwater aquaculture]. Moscow: RUDN, 138 p. (in Russian).
13. Singer, D. (1978). Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval. *SIAM journal of applied math*, vol. 35, pp. 260–268.
14. Zhuravlev, V. B. (2012). *K metodike izucheniia chislennosti populiatcii redkikh i ischezaiushchikh vidov ryb* [To the technique of study in the number of populations of rare and extinct species]. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta – Bulletin of NSAU (Novosibirsk state agrarian university)*, vol. 2, no. 23, pp. 20–27 (in Russian).
15. Feldman, M. G., Shevliakov, E. A., Zorbidi, Zh. Kh. (2014). *Prognozirovanie podkhodov lososevykh (na primere kizhucha zapadnoi Kamchatki) s ispolzovaniem modelei ekstrapoliatcii vremennykh riadov i modelei “zapas-popolnenie”* [Forecasting the runs of pacific salmon (for example – a coho salmon of the Western Kamchatka) on the base of “stock–recruitment” models and time series extrapolation simulations]. *Issledovaniia vodnykh biologicheskikh resursov Kamchatki i severo-zapadnoi chasti Tikhogo okeana – The researches of the aquatic biological resources of Kamchatka and of the north-west part of the Pacific Ocean*, no. 34, pp. 87–106 (in Russian).
16. Sheperd, J.G. (1982). A versatile new stock-recruitment relationship for fisheries and the construction of sustainable yield curves. *J. Cons. Intern. Explor. Mer.*, vol. 40, pp. 67–75.
17. Collet, P., Eckmann, J., Lansford, O. E. (1980). Universal properties of maps of an interval. *Gomm. Math. Phys.*, vol. 76, no. 3, pp. 211–254.
18. Sheludko, A. S., Shiriaev, V. I. (2015). *Algoritm garantirovannogo ocenivaniia parametra odnomernogo khaoticheskogo otobrazheniia* [The Algorithm of Guaranteed Parameter Estimation for One-Dimensional Chaotic Map]. *Informatcionnye tekhnologii – Information technologies*, no. 1, pp. 30–34 (in Russian).
19. Aarde, van R. J. et al. (1999). Culling and the dynamics of the Kruger National Park African elephant population. *Animal Conservation*, vol. 2, pp. 287–294.

**Дубровская Виктория Андреевна** – аспирант, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (ул. 14-линия, 39, г. Санкт-Петербург, 199178, Россия).

**Дубровська Вікторія Андріївна** – аспірант, Санкт-Петербурзький інститут інформатики та автоматизації РАН (вул. 14-лінія, 39, м. Санкт-Петербург, 199178, Росія).

**Dubrovskaiia Victoria** – PhD student, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS (39, 14-line Str., 199178 Saint-Petersburg, Russia).

**E-mail:** torry\_2902@mail.ru

**Переварюха Андрей Юрьевич** – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (ул. 14-линия, 39, г. Санкт-Петербург, 199178, Россия).

**Переварюха Андрій Юрійович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Санкт-Петербурзький інститут інформатики та автоматизації РАН (вул. 14-лінія, 39, г. Санкт-Петербург, 199178, Росія).

**Perevaryukha Andrey** – PhD in Technical Sciences, Senior Research Fellow, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of RAS (39, 14-line Str., 199178 Saint-Petersburg, Russia).

**E-mail:** madelf@pisem.net

**Соловьева Инна Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет (Университетский просп. 35, Петергоф, г. Санкт-Петербург, 198504, Россия).

**Соловійова Інна Володимирівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Санкт-Петербурзький державний університет (Університетський просп. 35, Петергоф, м. Санкт-Петербург, 198504, Росія).

**Soloveva Inna** – PhD in Technical Sciences, Associate Professor, St. Petersburg State University (35 University Av., Peterhof, 198504 Saint-Petersburg, Russia).

**E-mail:** inna.solovyeva@gmail.com