

**Висновки.** Наведено розрахунки удару тілом по консольній балці. Це може бути цікавим з наукового погляду і корисним в інженерній практиці. Розрахунки проілюстрували нові можливості сучасної обчислювальної техніки. Але конструкція, до якої прикладається ударне навантаження, може бути суттєво складнішою. В цьому випадку рух конструкції зручно описувати, застосовуючи метод скінченних елементів. Для наведеного у цій роботі прикладу такі розрахунки були виконані та одержані результати. З одного боку, ці розрахунки перевірили правильність одержаних результатів. З іншого – застосування методу скінченних елементів розкриває широкі можливості для розрахунку досить складних конструкцій на різні види динамічних навантажень.

#### Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. : Наука, 1967. – 444 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит ; пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лузина. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.
3. Грицюк В. Ю. Алгоритми чисельного розрахунку малих коливань механічних систем / В. Ю. Грицюк // Вісник Чернігівського держ. техн. ун-ту. – 2001. – № 12. – С. 43–46.

УДК 534.1:539.3

**О. В. Савченко**, канд. техн. наук

**О. Л. Деркач**, аспірант

**С. М. Ющенко**, аспірант

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

#### ВИЗНАЧЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

**О. В. Савченко**, канд. техн. наук

**О. Л. Деркач**, аспірант

**С. М. Ющенко**, аспірант

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Olena Savchenko**, PhD in Technical Sciences

**Oleh Derkach**, PhD student

**Svitlana Yushchenko**, PhD student

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

#### DETERMINATION OF EFFECTIVE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE ELECTRO-VISCOELASTIC COMPOSITE MATERIALS

*Розглянуто дві методики визначення ефективних в'язкопружних, п'єзоелектричних та діелектричних динамічних характеристик композиційного матеріалу з п'єзоелектричними шарами. За першою методикою композиційна структура розглядається як квазіоднорідний матеріал з використанням гіпотез Фойхта-Рейсса; за другою – проводиться чисельний аналіз ефективних характеристик композиційного макронеоднорідного матеріалу за допомогою методу скінченних елементів. Результати досліджень порівнюються.*

**Ключові слова:** п'єзоелектричний матеріал, композиційний матеріал, ефективні характеристики, декремент коливаний, метод скінченних елементів.

*Рассмотрено две методики определения эффективных вязкоупругих, пьезоэлектрических и диэлектрических динамических характеристик композиционного материала с пьезоэлектрическими слоями. По первой методике композиционная структура рассматривается как квазиоднородный материал с использованием гипотез Фойхта-Рейсса; по второй – проводится численный анализ эффективных характеристик композиционного макронеоднородного материала с помощью метода конечных элементов. Проводится сравнение результатов исследования.*

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический материал, композиционный материал, эффективные характеристики, декремент колебаний, метод конечных элементов.

*Two methods for determining the effective viscoelastic, piezoelectric and dielectric dynamic characteristics of composite material with piezoelectric layers are considered. According to the first method composite structure is regarded as a quasi-*

*homogeneous material using Voigt and Reuss hypotheses. According to the second the numerical analysis of effective characteristics of macro-inhomogeneous composite material using finite element method is performed. The results of research are compared.*

**Key words:** piezoelectric material, composite material, effective characteristics, decrement of vibrations, finite element method.

**Вступ.** Для керування переміщеннями елементів конструкції останнім часом все частіше використовуються п'єзоелектричні матеріали, зокрема, як активні і пасивні елементи конструкцій у поєднанні з іншими конструкційними матеріалами у вигляді композита. Використання структурно-неоднорідних матеріалів з п'єзоелектричними елементами дозволяє підвищити разом з іншими і дисипативні характеристики композитного матеріалу. Важливим фактором для конструювання та впровадження активних і пасивних п'єзоелектричних композитних елементів конструкцій є розроблення методів оптимального проектування, заснованих на коректних з фізичного погляду математичних моделях.

Математична модель композиційного матеріалу будується за допомогою уведення припущень про взаємодію його компонентів і отримання деяких ефективних характеристик, після чого матеріал розглядається як гомогенний. Ефективні характеристики визначаються через порівняння напружено-деформованих станів або енергій деформування, що може проводитись як за допомогою точного визначення полів напружень і деформацій, так і з використанням більш або менш достовірних гіпотез [1; 2]. Для п'єзокомпозитів задача визначення ефективних характеристик ускладнюється через зв'язаність механічних та електричних полів.

Методика одержання ефективних в'язкопружних, п'єзоелектричних та діелектричних характеристик композиційних матеріалів розглядається у значній кількості робіт [1-8], однак питання визначення ефективних дисипативних характеристик залишається поза увагою дослідників, що дивно, зважаючи на виключно важливе їх практичне значення для роботи конструкцій в умовах динамічних навантажень.

З огляду на перспективи використання п'єзоелементів як пасивних і активних елементів конструкцій виникає необхідність побудови коректної методики врахування дисипативних характеристик структурно неоднорідних матеріалів.

**Варіант гіпотези Фойхта-Рейсса для електров'язкопружного композиційного матеріалу.** Для п'єзокомпозиційних матеріалів, які працюють при невисоких рівнях напружень, переважно, характерним є частотно-залежне розсіяння енергії. Залежності компонент композиційного матеріалу від частоти одержують з експериментальних досліджень.

Фізичні рівняння електров'язкопружного матеріалу мають вигляд [9]:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R_C(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t R_e(t-\tau) \dot{E}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^t R_e(t-\tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t R_k(t-\tau) \dot{E}(\tau) d\tau,$$

де  $R_C(t-\tau)$ ,  $R_e(t-\tau)$ ,  $R_k(t-\tau)$  – відповідно матриці функцій релаксації в'язкопружних, п'єзоелектричних і діелектричних властивостей матеріалу;  $\sigma(t)$ ,  $D(t)$ ,  $\dot{\epsilon}(\tau)$ ,  $\dot{E}(\tau)$  – вектори напруження, електричного зміщення, швидкостей деформації і напруженості електричного поля відповідно,  $t$  – час.

Залежності (1) запишемо в частотному просторі, застосувавши інтегральне перетворення Фур'є до релаксаційних інтегралів у (1):

$$\tilde{\sigma}(i\omega) = \tilde{C}(i\omega)\tilde{\varepsilon} - \tilde{e}(i\omega)^T \tilde{E}, \quad \tilde{D}(i\omega) = \tilde{e}(i\omega)\tilde{\varepsilon} + \tilde{\kappa}(i\omega)\tilde{E}, \quad (2)$$

де  $\tilde{C}(i\omega)$  – матриця комплексних модулів,  $\tilde{e}(i\omega)$  – матриця комплексних п'єзоконстант,  $\tilde{\kappa}(i\omega)$  – матриця комплексних діелектричних модулів;  $\tilde{\sigma}(i\omega)$ ,  $\tilde{D}(i\omega)$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\varepsilon}$  – інтегральні перетворення відповідно векторів  $\sigma(t)$ ,  $D(t)$ ,  $E(\tau)$ ,  $\varepsilon(\tau)$ <sup>\*</sup>;  $\omega$  – частота,  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\sigma = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3 \ \sigma_4 \ \sigma_5 \ \sigma_6)^T$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_4 \ \varepsilon_5 \ \varepsilon_6)^T$  – вектори напружень і деформацій відповідно;  $D = (D_1 \ D_2 \ D_3)^T$ ,  $E = (E_1 \ E_2 \ E_3)^T$  – вектори електричного зміщення і напруженості електричного поля відповідно;

$C$  – матриця комплексних модулів, яка для матеріалу з однією площиною симетрії ( $xOy$ ) має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{64} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$e$  – матриця комплексних п'єзоконстант, яка для матеріалу з однією площиною симетрії ( $xOy$ ) і поляризацією вздовж осі  $z$  має вигляд

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$\kappa$  – матриця діелектричних модулів

$$\kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для  $k$ -го шару матеріалу, який складається з  $n$  шарів в'язкопружних і п'єзоелектричних анізотропних матеріалів, фізичні залежності у просторі інтегральних перетворень Фур'є (2) запишемо у вигляді одного узагальненого рівняння [9]

$$\sigma^{(k)} = C^{(k)}\varepsilon^{(k)}, \quad (k=1, \dots, n), \quad (6)$$

де  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$  – зображення, відповідно, векторів узагальнених напружень і деформацій у точках  $k$ -го шару:

$$\sigma^{(k)} = \left( \sigma_1^{(k)} \ \sigma_2^{(k)} \ \sigma_3^{(k)} \ \sigma_4^{(k)} \ \sigma_5^{(k)} \ \sigma_6^{(k)} \ \sigma_7^{(k)} \ \sigma_8^{(k)} \ \sigma_9^{(k)} \right)^T; \quad (7)$$

$$\varepsilon^{(k)} = \left( \varepsilon_1^{(k)} \ \varepsilon_2^{(k)} \ \varepsilon_3^{(k)} \ \varepsilon_4^{(k)} \ \varepsilon_5^{(k)} \ \varepsilon_6^{(k)} \ \varepsilon_7^{(k)} \ \varepsilon_8^{(k)} \ \varepsilon_9^{(k)} \right)^T; \quad (8)$$

$\sigma_1^{(k)} \dots \sigma_6^{(k)}$ ,  $\varepsilon_1^{(k)} \dots \varepsilon_6^{(k)}$  – компоненти векторів напружень і деформацій відповідно;

$\sigma_7^{(k)} \equiv D_1^{(k)}$ ,  $\sigma_8^{(k)} \equiv D_2^{(k)}$ ,  $\sigma_9^{(k)} \equiv D_3^{(k)}$  – компоненти векторів електричної індукції;

<sup>\*</sup>) Оскільки усі подальші дії виконуються у просторі перетворень Фур'є, далі аргумент  $i\omega$  і знак  $\sim$  опущено.

$\varepsilon_7^{(k)} \equiv E_1^{(k)}$ ,  $\varepsilon_8^{(k)} \equiv E_2^{(k)}$ ,  $\varepsilon_9^{(k)} \equiv E_3^{(k)}$  – компоненти векторів напруженості електричного поля;

$C^{(k)}$  – матриця сталих матеріалу:

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & C_{16}^{(k)} & 0 & 0 & e_{31}^{(k)} \\ C_{21}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & C_{26}^{(k)} & 0 & 0 & e_{32}^{(k)} \\ C_{31}^{(k)} & C_{32}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & C_{36}^{(k)} & 0 & 0 & e_{33}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} & 0 & e_{14}^{(k)} & e_{24}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54}^{(k)} & C_{55}^{(k)} & 0 & e_{15}^{(k)} & e_{25}^{(k)} & 0 \\ C_{61}^{(k)} & C_{62}^{(k)} & C_{63}^{(k)} & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} & 0 & 0 & e_{36}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & e_{14}^{(k)} & e_{15}^{(k)} & 0 & \kappa_{11}^{(k)} & \kappa_{12}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^{(k)} & e_{25}^{(k)} & 0 & \kappa_{21}^{(k)} & \kappa_{22}^{(k)} & 0 \\ e_{31}^{(k)} & e_{32}^{(k)} & e_{33}^{(k)} & 0 & 0 & e_{36}^{(k)} & 0 & 0 & \kappa_{33}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Розглянемо наближений метод, який полягає у процедурі усереднення полів напружень і деформацій неоднорідного матеріалу. Для прикладу розглянемо двоконцентний багатошаровий матеріал з в'язкопружною матрицею і п'єзоелектричними шарами (рис. 1).

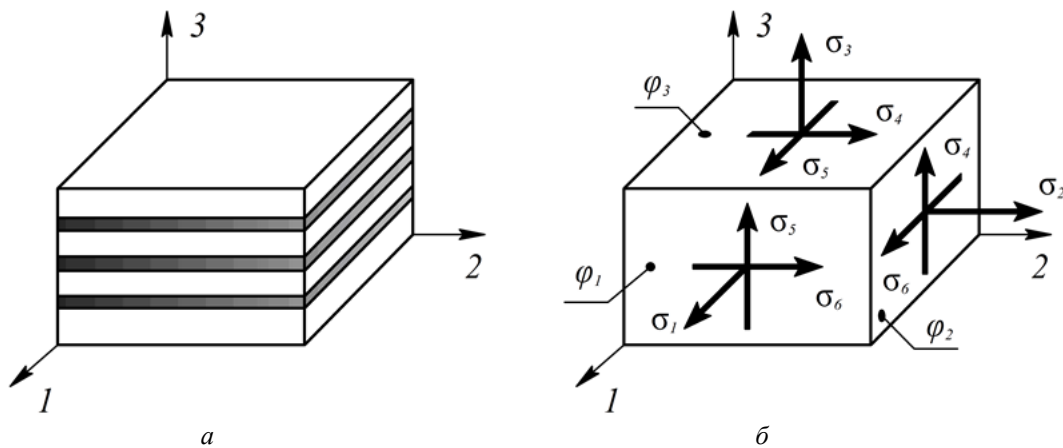


Рис. 1. Елемент об'єму багатошарової структури (а), напружений стан (б); ( $\sigma_1 \dots \sigma_6$  – напруження,  $\varphi_1 \dots \varphi_3$  – електричні потенціали еквіпотенціальних граней одиничного об'єму)

Введемо середні по об'єму елемента композиційного матеріалу узагальнені напруження і деформації. Для цього використаємо систему гіпотез Фойхта-Рейсса, згідно з якими для деякого представницького об'єму квазіоднорідного матеріалу багатошарової структури (рис. 1, а) можна записати умови однорідності і неперервності відповідних узагальнених напружень і деформацій:

$$\bar{\sigma}_r = \sum_{k=1}^n \eta_k \sigma_r^{(k)}, \quad \bar{\varepsilon}_s = \sum_{k=1}^n \eta_k \varepsilon_s^{(k)}, \quad \bar{\sigma}_s = \sigma_s^{(k)}, \quad \bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r^{(k)}, \quad (r=1, 2, 6, 7, 8; \quad s=3, 4, 5, 9), \quad (10)$$

де  $\eta_k = V/V_m$  – коефіцієнти армування;  $V$ ,  $V_m$  – об'єми армуючого матеріалу і матриці.

Відповідно до прийнятої нумерації узагальнених напружень і деформацій (7), (8) матрицю сталих матеріалу (9) запишемо у вигляді блочних матриць:

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} C_{rr}^{(k)} & C_{rs}^{(k)} \\ C_{sr}^{(k)} & C_{ss}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{rr}^{(k)} &= \begin{pmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{16}^{(k)} & 0 & 0 \\ C_{21}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & 0 & 0 \\ C_{61}^{(k)} & C_{62}^{(k)} & C_{66}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{11}^{(k)} & \kappa_{12}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{21}^{(k)} & \kappa_{22}^{(k)} \end{pmatrix}, & \mathbb{C}_{rs}^{(k)} &= \begin{pmatrix} C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & e_{31}^{(k)} \\ C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & e_{32}^{(k)} \\ C_{63}^{(k)} & 0 & 0 & e_{36}^{(k)} \\ 0 & e_{14}^{(k)} & e_{15}^{(k)} & 0 \\ 0 & e_{24}^{(k)} & e_{25}^{(k)} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbb{C}_{sr}^{(k)} &= \begin{pmatrix} C_{31}^{(k)} & C_{32}^{(k)} & C_{36}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{14}^{(k)} & e_{24}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(k)} & e_{25}^{(k)} \\ e_{31}^{(k)} & e_{32}^{(k)} & e_{36}^{(k)} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{C}_{ss}^{(k)} &= \begin{pmatrix} C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & e_{33}^{(k)} \\ 0 & C_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{55}^{(k)} & 0 \\ e_{33}^{(k)} & 0 & 0 & \kappa_{33}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{12}
\end{aligned}$$

після чого визначальні рівняння для матеріалу  $k$ -го шару можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sigma_r^{(k)} \\ \sigma_s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{rr}^{(k)} & \mathbb{C}_{rs}^{(k)} \\ \mathbb{C}_{sr}^{(k)} & \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_r^{(k)} \\ \varepsilon_s^{(k)} \end{pmatrix}, \text{ або } \sigma^{(k)} = \mathbb{C}^{(k)} \cdot \varepsilon^{(k)}. \tag{13}$$

Далі введемо середні по об'єму елемента багатошарового матеріалу напруження і деформації згідно з (10) і припустимо, що фізичні залежності для такого матеріалу можна записати у вигляді рівняння, аналогічного рівнянню (13):

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_r \\ \bar{\sigma}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbb{C}}_{rr} & \bar{\mathbb{C}}_{rs} \\ \bar{\mathbb{C}}_{sr} & \bar{\mathbb{C}}_{ss} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}_r \\ \bar{\varepsilon}_s \end{pmatrix}, \text{ або } \bar{\sigma} = \bar{\mathbb{C}} \cdot \bar{\varepsilon}. \tag{14}$$

Задача побудови математичної моделі квазіоднорідного матеріалу багатошарової структури полягає у визначенні компонент матриці модулів у рівнянні (14) за відомими компонентами матриці у (13). Одержані залежності мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{C}}_{rr} &= \sum_{k=1}^n \eta_k \mathbb{C}_{rr}^{(k)} - \sum_{k=1}^n \eta_k \mathbb{C}_{rs}^{(k)} \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \mathbb{C}_{sr}^{(k)} + \\
&+ \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \mathbb{C}_{rs}^{(k)} \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \mathbb{C}_{sr}^{(k)} \right), \\
\bar{\mathbb{C}}_{rs} &= \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \mathbb{C}_{rs}^{(k)} \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right) \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right), \\
\bar{\mathbb{C}}_{sr} &= \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right) \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \mathbb{C}_{sr}^{(k)} \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right), \quad \bar{\mathbb{C}}_{ss} = \left( \sum_{k=1}^n \eta_k \left( \mathbb{C}_{ss}^{(k)} \right)^{-1} \right)^{-1}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Декремент коливань для одиничного об'єму матеріалу (рис. 1, б) визначається для  $n$ -ї форми коливань у випадку пасивного п'єзоелектричного елемента за формулою [5]

$$\Delta^{(n)} = \pi \frac{\bar{\varepsilon}^{(n)H} \operatorname{Im}(\bar{\mathbb{C}}) \bar{\varepsilon}^{(n)}}{\bar{\varepsilon}^{(n)H} \operatorname{Re}(\bar{\mathbb{C}}) \bar{\varepsilon}^{(n)}}. \tag{16}$$

Вектори узагальнених переміщень формуються з елементів вектора середніх деформацій (8) відповідно до прийнятої форми деформації одиничного об'єму квазіоднорідного матеріалу.

На рис. 2 наведено результати визначення залежностей декрементів коливань для деяких значень вектора деформацій (рис. 2, а) та дійсних компонент комплексних мо-

дулів в'язкопружних, п'єзоелектричних і діелектричних характеристик композиційного матеріалу від коефіцієнта армування (рис. 2, б-г).

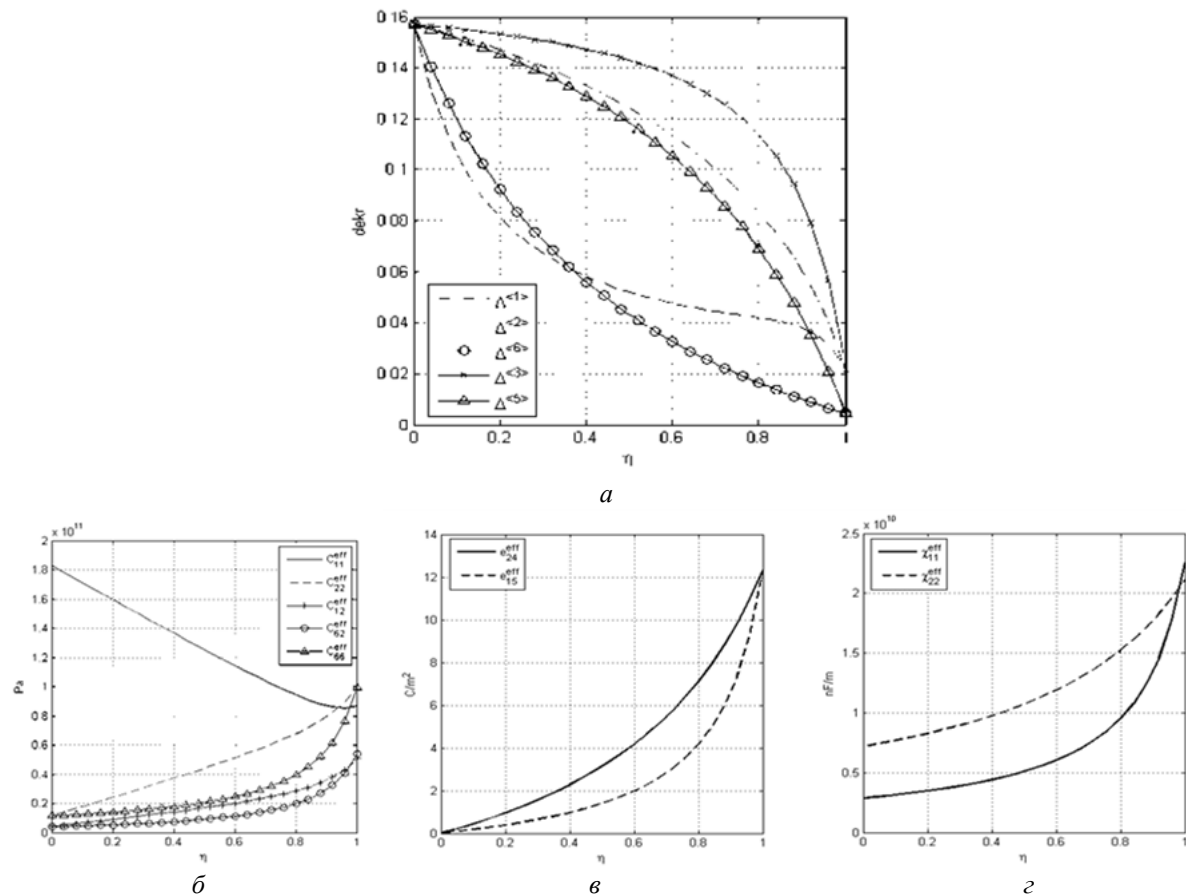


Рис. 2. Залежність дисипативних, в'язкопружних, п'єзоелектричних та діелектричних ефективних характеристик композиційного матеріалу від коефіцієнта армування: а – декременти коливань

для різних значень вектора деформації:  $1 - \bar{\epsilon}^{(1)} = [\bar{\epsilon}_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_9]^T$ ,

$2 - \bar{\epsilon}^{(2)} = [0 \ \bar{\epsilon}_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_9]^T$ ,  $3 - \bar{\epsilon}^{(3)} = [0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$

$5 - \bar{\epsilon}^{(5)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$   $6 - \bar{\epsilon}^{(6)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_6 \ 0 \ 0 \ \bar{\epsilon}_9]^T$ ;

б – в'язкопружні; в – п'єзоелектричні; г – діелектричні компоненти матриць ефективних характеристик

**Варіант методу енергетичної континуалізації.** Визначимо ефективні характеристики матеріалу, скориставшись методикою енергетичної континуалізації [1–3]. Побудову математичних моделей представницького елемента об'єму проведемо за допомогою методу скінчених елементів (МСЕ). Енергетичні методи визначення ефективних характеристик композиційних матеріалів ґрунтуються на рівності енергій неоднорідного (гетерогенного) і еквівалентного йому однорідного (гомогенного) середовищ. Точність значень ефективних характеристик залежить від точності знайдених усереднених тензорів напружень і деформацій. Врахувати складні граничні умови, структурну неоднорідність і реальний розподіл напружень та деформацій у матеріалі можна тільки за допомогою чисельних методів розрахунку.

Максимальне значення питомої потенціальної енергії деформації п'єзоелектричного тіла у випадку прямого п'єзоелектричного ефекту визначається за формулою

$$\text{Re}U_{(m+pe)} = \frac{1}{2} \epsilon_0^T \text{Re} (C + e^T \kappa^{-1} e) \epsilon_0, \quad (17)$$

де  $\varepsilon_0$  – амплітуда деформації.

За відсутності п'єзоелектричного ефекту (неполяризована кераміка) дійсна частина енергії матиме вигляд

$$\operatorname{Re} U_{(m)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^T \operatorname{Re}(C) \varepsilon_0. \quad (18)$$

Середнє значення розсіяної енергії за цикл коливань в одиниці об'єму:

$$\operatorname{Im} U_{(m+me)} = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \pi \varepsilon_0^T \operatorname{Im}(C + e^T \kappa^{-1} e) \varepsilon_0, \quad (19)$$

$$\operatorname{Im} U_{(m)} = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} dt = \pi \varepsilon_0^T \operatorname{Im}(C) \varepsilon_0. \quad (20)$$

Декремент коливань визначається за формулами

$$\Delta_{(m+me)}(\omega) = \frac{\operatorname{Im} U_{(m+me)}}{2 \operatorname{Re} U_{(m+me)}} = \pi \frac{\varepsilon_0^T \operatorname{Im}(C + e^T \kappa^{-1} e) \varepsilon_0}{\varepsilon_0^T \operatorname{Re}(C + e^T \kappa^{-1} e) \varepsilon_0}, \quad (21)$$

$$\Delta_{(m)}(\omega) = \frac{\operatorname{Im} U_{(m)}}{2 \operatorname{Re} U_{(m)}} = \pi \frac{\varepsilon_0^T \operatorname{Im}(C) \varepsilon_0}{\varepsilon_0^T \operatorname{Re}(C) \varepsilon_0}. \quad (22)$$

З умов еквівалентності гетерогенного і гомогенного матеріалів прирівнюємо пружні і дисипативні енергії [3]:

$$\text{– для поляризованої кераміки: } \operatorname{Re} U_{(m+me)} \cong \operatorname{Re} U_{(m+me)}^{eff}, \quad \operatorname{Im} U_{(m+me)} \cong \operatorname{Im} U_{(m+me)}^{eff}; \quad (23)$$

$$\text{– для неполяризованої: } \operatorname{Re} U_{(m)} \cong \operatorname{Re} U_{(m)}^{eff}, \quad \operatorname{Im} U_{(m)} \cong \operatorname{Im} U_{(m)}^{eff}.$$

**Метод скінченних елементів.** Розглянемо скінченно-елементну апроксимацію полів переміщень і електричної напруженості.

При нульових початкових умовах рівняння динаміки, одержані з використанням варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, після інтегрального перетворення Фур'є мають вигляд рівнянь лінійної теорії пружності з комплексними модулями [11]:

$$(i\omega)^2 M u + K_{uu} u + K_{u\varphi} \varphi = F(i\omega), \quad K_{\varphi u} u + K_{\varphi\varphi} \varphi = 0, \quad (24)$$

де

$$M = \int_V N_u^T \rho N_u dV, \quad K_{uu} = \int_V (AN_u)^T C(i\omega) AN_u dV, \quad K_{u\varphi} = \int_V (AN_u)^T e(i\omega)^T \nabla N_\varphi dV,$$

$$K_{\varphi u} = K_{u\varphi}^T, \quad K_{\varphi\varphi} = \int_V (\nabla N_\varphi)^T \chi(i\omega) \nabla N_\varphi dV, \quad F(i\omega) = \int_{S_1} N_u^T \mathcal{F}[p_S(S, t)] dS.$$

З рівнянь динаміки (24) виключаємо потенціал  $\varphi$ :

$$\left( K_{uu} + K_{u\varphi} K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi u} + (i\omega)^2 M \right) u_0 = F(i\omega), \quad (25)$$

Ліву і праву частини рівняння (25) помножимо на  $1/2$  та спряжено-транспонований вектор  $u_0^H$ :

$$\frac{1}{2} u_0^H \left( K_{uu} + K_{u\varphi} K_{\varphi\varphi}^{-1} K_{\varphi u} + (i\omega)^2 M \right) u_0 = \frac{1}{2} u_0^H F(i\omega). \quad (26)$$

За відсутності зовнішніх сил ( $F = 0$ ) при квазістатичному деформуванні умовою еквівалентності характеристик композиційного і квазіоднорідного матеріалів є рівність енергій деформацій

$$u_0^H \operatorname{Re}(K_{EM}(i\omega))u_0 \cong u_0^H \operatorname{Re}(C_{EM}^{eff}(i\omega))u_0, \tag{27}$$

$$u_0^H \operatorname{Im}(K_{EM}(i\omega))u_0 \cong u_0^H \operatorname{Im}(C_{EM}^{eff}(i\omega))u_0, \tag{28}$$

де  $K_{EM} = K_{uu} + K_{u\phi}K_{\phi\phi}^{-1}K_{\phi u}$ .

Декременти поляризованого і неполяризованого композиційного матеріалу визначаються таким чином:

$$\Delta_{(m+me)}^{(n)} = \frac{\operatorname{Im}U_{(m+me)}^{(n)}}{2\operatorname{Re}U_{(m+me)}^{(n)}} = \pi \frac{u_0^{(n)H} \operatorname{Im}(K_{EM}(i\omega))u_0^{(n)}}{u_0^{(n)H} \operatorname{Re}(K_{EM}(i\omega))u_0^{(n)}}, \tag{29}$$

$$\Delta_{(m)}^{(n)} = \frac{\operatorname{Im}U_{(m)}^{(n)}}{2\operatorname{Re}U_{(m)}^{(n)}} = \pi \frac{u_0^{(n)H} \operatorname{Im}(K_{uu}(i\omega))u_0^{(n)}}{u_0^{(n)H} \operatorname{Re}(K_{uu}(i\omega))u_0^{(n)}}. \tag{30}$$

Граничні умови для механічних переміщень і електричного поля для представницького елемента об'єму (рис. 3) наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Механічні й електричні граничні умови для визначення декременту  $\Delta^{(1)}$  при розтягу-стиску представницького елемента об'єму (рис. 3)

Грань (рис. 3)	Механічні переміщення	Електрод (рис. 3)	Електричні граничні умови на електродах
ABCD	$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$	abcd	– (заряд відсутній)
EFGH	$u_1 = 1$	efgh	–
BFGC	–	bfgc	–
AEHD	–	aehd	–
AEFB	$u_3 = 0$	aefb	$\phi = 0$ (заземлення)
DHGC	$u_3 = 0$	dhgc	$\phi = 0$

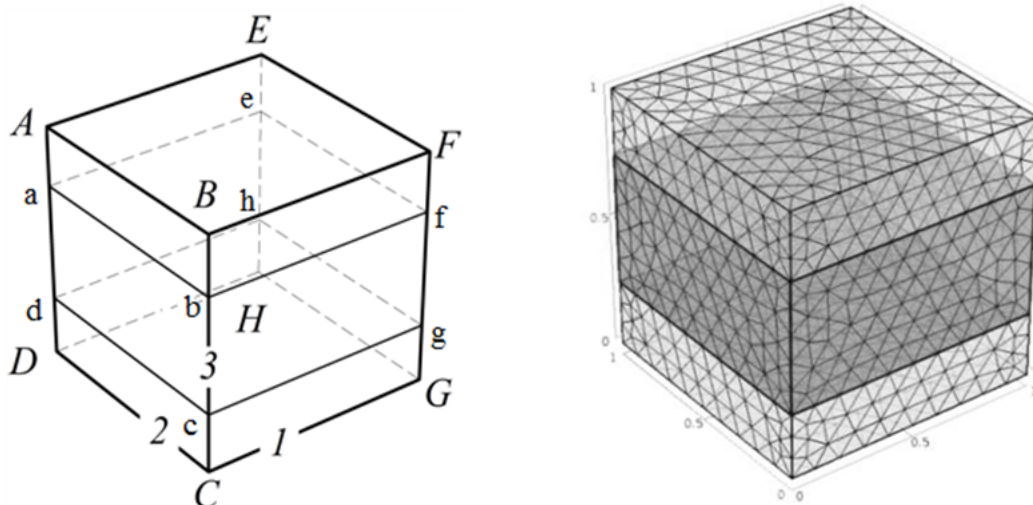


Рис. 3. Представницький елемент і його скінченно-елементна модель



**Результати порівняння декрементів коливань.** Розрахунки проведемо для поляризованого п'єзоелектричного композиційного матеріалу. Зі збільшенням коефіцієнта армування концентрація п'єзоматеріалу збільшується.

Властивості матеріалів – складових композита – наведено у табл. 2 [8].

Таблиця 2

*Характеристики матеріалів матриці і п'єзоелектричного матеріалу*

Параметр	Матриця CrEr <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	П'єзоматеріал PZT [5; 6]	
Пружні сталі, ГПа	$C_{11}$	$183,0 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$86,856 \cdot (1+i \cdot 6,40 \cdot 10^{-3})$
	$C_{22}$	$11,620 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$99,201 \cdot (1+i \cdot 6,90 \cdot 10^{-3})$
	$C_{33}$	$11,620 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$99,201 \cdot (1+i \cdot 6,90 \cdot 10^{-3})$
	$C_{12}$	$4,363 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$50,778 \cdot (1+i \cdot 9,80 \cdot 10^{-3})$
	$C_{13}$	$4,363 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$50,778 \cdot (1+i \cdot 9,80 \cdot 10^{-3})$
	$C_{23}$	$3,918 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$54,016 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-3})$
	$C_{44}$	$2,870 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$22,593 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-3})$
	$C_{55}$	$7,170 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$21,10 \cdot (1+i \cdot 1,40 \cdot 10^{-3})$
	$C_{66}$	$7,170 \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$21,10 \cdot (1+i \cdot 1,40 \cdot 10^{-3})$
П'єзоелектричні сталі, Кл/м	$e_{14} = e_{36} = e_{25}$	0	0
	$e_{15} = e_{24}$	0	$12,322 \cdot (1-i \cdot 2,10 \cdot 10^{-5})$
	$e_{31} = e_{32}$	0	$-7,209 \cdot (1-i \cdot 8,30 \cdot 10^{-5})$
	$e_{33}$	0	15,118
Діелектричні сталі, Ф/м	$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33}$	$-153,0 \cdot 10^{-9} \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$	$-153,0 \cdot 10^{-10} \cdot (1+i \cdot 5,0 \cdot 10^{-2})$
Густина, кг/м <sup>3</sup>	$\rho$	$1,850 \cdot 10^3$	$6,850 \cdot 10^3$

Прослідкуємо, як впливає концентрація п'єзоматеріалу у фізичному рівнянні на розсіяння енергії. Для цього визначимо декремент коливань для неполяризованого матеріалу (30) і порівняємо з раніше розрахованим декрементом для поляризованої п'єзокераміки (29). Порівняння результатів розрахунків за допомогою чисельного (МСЕ) і аналітичного (гіпотеза Фойхта-Рейсса) методів наведено на рис. 4.

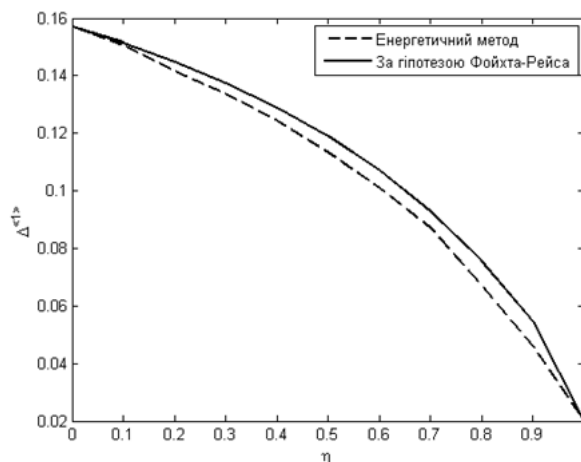


Рис. 4. Залежність декременту коливань від коефіцієнта армування двокомпонентного матеріалу за двома методами

При механічних навантаженнях, коли п'єзоелектричний поляризований елемент використовуємо як сенсор, спостерігається незначне збільшення декременту (рис. 5).

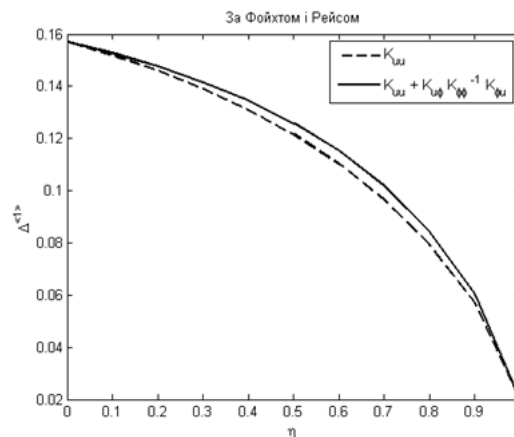


Рис. 5. Залежність декременту коливань від коефіцієнта армування з урахуванням електромеханічного ефекту (—) і без нього (- -)

**Висновки.** Визначено ефективні в'язкопружні, п'єзоелектричні та діелектричні динамічні характеристики багатошарового композиційного матеріалу за допомогою варіанта гіпотези Фойхта-Рейсса, який дозволяє одержати модель квазіоднорідного матеріалу, та за допомогою уточненої моделі, одержаної за допомогою методу скінченних елементів. Результати порівняння для наближеної й уточненої моделей матеріалу показали достатньо гарний збіг. Наближена модель потребує меншого часу на розрахунки, що є важливою перевагою під час використання методів оптимізації. Уточнена модель дозволяє врахувати особливості напружено-деформівного стану, а також розподілення електростатичного поля у структурно неоднорідному матеріалі.

Використання чисельних методів визначення характеристик п'єзоелектричного матеріалу дозволяє врахувати складну картину полів напружень, пов'язаних зі складною структурою армування композиційного матеріалу, а також зв'язаність полів деформацій і електричної напруженості у п'єзоелектричних елементах та граничні умови на електродах.

Проведений аналіз показав, що розглянуті моделі можна застосовувати для визначення дисипативних характеристик складних структурно-неоднорідних пасивних елементів композитних конструкцій. Водночас результати розрахунку показують, що використання у складі композитів п'єзоматеріалу у вигляді сенсора не приводить до суттєвого збільшення розсіяння енергії. Згідно з [10; 11] цього можна досягнути використанням додаткових шунтуючих пристроїв і оптимальним вибором в'язкопружних демпфіруючих матеріалів.

#### Список використаних джерел

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М. : Мир, 1982. – 334 с.
2. Хорошун Л. П. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, П. В. Лещенко ; отв. ред. Н. А. Шульга. – К. : Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. Дубенець В. Г. Визначення ефективних характеристик в'язкопружних композиційних матеріалів / В. Г. Дубенець, О. О. Яковенко // Проблеми прочності. – 2009. – № 4. – С. 124–132.
4. Дубенець В. Г. Колебания демпфированных композитных конструкций / В. Г. Дубенець, В. В. Хильчевский. – К. : Вища школа, 1995. – Т. 1. – 226 с.
5. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций : монография / Е. В. Савченко. – Нежин : Аспект-Поліграф, 2006. – 232 с.
6. Berger H. Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties / H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodriguez-Ramos, J. Bravo-Castillero, R. Guinovart-Diaz, F. J. Sabina and G. A. Maugin // Smart Mater. and Struct. – 2006. – Vol. 15. – P. 451–458.

7. *Trindade M. A.* Evaluation of effective material properties of thickness-shear piezoelectric macro-fiber composites / M. A. Trindade, A. Benjeddou // 21<sup>st</sup> International Congress of Mechanical Engineering “Proceedings of COBEM 2011”, October 24–28, 2011, Natal, RN, Brazil.
8. *Odegard G. M.* Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites / G. M. Odegard // *Acta Materialia*. – 2004. – 52, № 18. – P. 5315-5330.
9. *Шульга Н. А.* Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев ; отв. ред. Б. П. Маслов. – К. : Наукова думка, 1990. – 228 с.
10. *Dubenets V. H.* Optimization of multilayered electro-viscoelastic plates / V. H. Dubenets, O. V. Savchenko // *Visnyk of Chernihiv State Technological University. Series “Engineering science”*. – Chernihiv : Chernihiv State Technological University, 2013. – № 2 (65). – P. 59–68.
11. *Hagood N.W., von Flotow A.* Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks / Hagood N.W., von Flotow A. // *J. Sound Vib.* – 1991. – Vol. 146. – P. 243–268.

УДК 621.01

**В.О. Харжевський**, канд. техн. наук

Хмельницький національний університет, м. Хмельницький, Україна

### ЧИСЛОВИЙ СИНТЕЗ НЕСИМЕТРИЧНИХ ВАЖІЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНО-НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ З ДОТИКОМ 5-ГО ПОРЯДКУ

**В.А. Харжевский**, канд. техн. наук

Хмельницкий национальный университет, г. Хмельницкий, Украина

### ЧИСЛЕННЫЙ СИНТЕЗ НЕСИММЕТРИЧНЫХ РЫЧАЖНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНО-НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ С КАСАНИЕМ 5-ГО ПОРЯДКА

**Viacheslav Kharzhevskiy**, PhD in Technical Sciences

Khmelnytskyi National University, Khmelnytskyi, Ukraine

### NUMERICAL SYNTHESIS OF THE UNSYMMETRIC LINKAGE STRAIGHT-LINE MECHANISMS WITH 5<sup>TH</sup> ORDER OF TANGENCY

*Розглянуто синтез важільних прямолінійно-напрямних механізмів, шатунна точка яких описує несиметричні шатунні криві. Синтез таких механізмів є важливим завданням, оскільки вони забезпечують більшу надійність, довговічність, навантажувальну здатність порівняно з іншими типами механізмів, зокрема кулачковими, та застосовуються в різних галузях машинобудування. Для проведення синтезу в роботі використовуються методи кінематичної геометрії шести нескінченно близьких положень, що відповідає дотику максимально можливого 5-го порядку шатунної кривої зі своєю дотичною та забезпечує проектування прямолінійно-напрямних механізмів зі значними ділянками наближення високої точності. Наведено числові результати проведеного синтезу.*

**Ключові слова:** важільні механізми, прямолінійно-напрямні механізми, синтез, випадок Чебишева 5-го порядку, кінематична геометрія.

*Рассмотрен синтез рычажных прямолинейно-направляющих механизмов, шатунная точка которых описывает несимметричные шатунные кривые. Синтез таких механизмов является важной задачей, поскольку они обеспечивают лучшую надежность, долговечность и нагрузочную способность по сравнению с другими типами механизмов, в частности кулачковыми, и используются в различных отраслях машиностроения. Для проведения синтеза в работе используются методы кинематической геометрии шести бесконечно близких положений, что соответствует касанию максимально возможного 5-го порядка шатунной кривой со своей касательной и обеспечивает проектирование прямолинейно-направляющих механизмов с продолжительными участками приближения высокой точности. Приведены численные результаты проведенного синтеза.*

**Ключевые слова:** рычажные механизмы, прямолинейно-направляющие механизмы, синтез, случай Чебышева 5-го порядка, кинематическая геометрия.

*The article is dedicated to the synthesis of the straight-line linkage mechanisms which coupler point could trace unsymmetric coupler curves. Synthesis of such mechanisms is an important task due to their high durability, reliability, load capacity in comparison with the other types of mechanisms, for example, cam mechanisms, and have wide application in different branches of machine building. For carrying out the synthesis procedure, methods of the kinematic geometry of the six infinitesimally close positions are used, which corresponds to the tangency of 5<sup>th</sup> order of the coupler curve with the tangent line which is the maximum available. It enables the designing of straight-line linkage mechanisms with large approximation parts with high accuracy. The numerical results of conducted synthesis are given.*

**Key words:** linkages, straight-line mechanisms, synthesis, 5<sup>th</sup> order Chebyshev's points, kinematic geometry.