

**І.М. Хоменко**, канд. техн. наук

Чернігівський національний технологічний університет, м. Чернігів, Україна

### ГРАНИЧНО ДОПУСТИМИЙ ЗАЗОР У СПРЯЖЕННІ ЗУБЦІВ ЗУБЧАСТОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ

**И.М. Хоменко**, канд. техн. наук

Черниговский национальный технологический университет, г. Чернигов, Украина

### ГРАНИЧНО ДОПУСТИМЫЙ ЗАЗОР В СОПРЯЖЕНИИ ЗУБЦОВ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

**Ivan Khomenko**, PhD in Technical Sciences

Chernihiv National University of Technology, Chernihiv, Ukraine

### BOUNDARY CLEARANCES IN THE DUAL TEETH GEARING

*У роботі наведено метод розрахунку гранично допустимого зазору у спряженні зубців зубчастого зацеплення.*

**Ключові слова:** гранично допустимий зазор, шестерні, контактна взаємодія шестерень.

*В работе приведен метод расчета предельно допустимого зазора в сопряжении зубцов зубчатого зацепления.*

**Ключевые слова:** предельно допустимый зазор, шестерни, контактное взаимодействие шестерен.

*In this paper the method for calculating the maximum allowable gap in the teeth of a gear coupling engagement.*

**Key words:** maximum allowable gap, gears, gear contact interaction.

**Вступ.** Під час зношування поверхонь зубців зубчастих передач зазор між зубцями може сягати величин, за яких контактна взаємодія між зубцями набуває ударного характеру. В роботі [3] було встановлено, що під час зростання зазору деформація поверхонь зубців при ударній взаємодії може зростати у декілька разів порівняно зі статичною деформацією.

Під час розв'язування динамічних задач спочатку розв'язують статичну задачу про контактну взаємодію між елементами спряження, оскільки пружні і деформівні характеристики матеріалу елементів спряжень не залежать від умов їх взаємодії.

Динником [1; 2] розглянута задача про стискування циліндра по діаметру з двох сторін. Місцеві пружні деформації при цьому можуть бути прийняті рівними контактному зближенню двох циліндрів однакових радіуса і матеріалу під дією стискуючих сил.

Якщо стискуючі сили спрямовані вздовж осі  $Z$  (збігається з віссю, яка проходить через центри циліндрів і перетинає лінію контакту циліндрів), то певна ділянка кожного циліндра в зоні контакту буде деформуватись у прямокутну фігуру, яка лежить у площині  $XU$ . Половина ширини прямокутника –  $a$  при цьому визначається за формулою [1]:

$$a = \sqrt{\frac{p'(\delta_1 + \delta_2) \cdot \rho_1 \cdot \rho_2}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad (1)$$

де  $p' = \frac{P}{b}$  – зусилля, що припадає на одиницю довжини циліндра, Н/м;

$P$  – стискуюча сила, застосована до циліндра, Н;

$b$  – довжина циліндра, м;

$\delta_i = \frac{4(1 - \mu_i^2)}{E_i}$  – коефіцієнт еластичності Кірхгофа  $i$ -го циліндра;

$\mu_i$  – коефіцієнт Пуассона;

$E_i$  – модуль пружності першого роду матеріалу циліндрів, Па;

$\rho_i$  – радіус кривизни тіл, що перебувають у контакті, м.

Із виразу (1) отримуємо формулу:

$$a = 1,077 \sqrt{\frac{p'(E_1 + E_2)\rho_1\rho_2}{E_1E_2(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad (2)$$

яка відповідає формулі Писаренка [5], а саме:

$$2a = 2,15 \sqrt{p' \frac{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}}}. \quad (3)$$

Найбільше контактне напруження, яке виникає під час стискування циліндрів згідно з [2]:

$$\sigma_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{2p'E_1E_2(\rho_1 + \rho_2)}{(E_1 + E_2)\rho_1\rho_2}}. \quad (4)$$

У випадку дотику  $n$ -го порядку тіл криволінійної поверхні (початковий поверхневий контакт) залежність між динамічною контактною силою –  $p$  і зближенням тіл –  $\alpha$  може бути визначена з формули, запропонованої Штаерманом [6]:

$$p = c\alpha^{\frac{2n+1}{2n}}, \quad (5)$$

де  $c$  – коефіцієнт, який залежить від кривизни поверхні і властивостей матеріалу тіл, що контактують. При контакті куль  $n = 1$  і  $p = c\alpha^{\frac{3}{2}}$ . Тобто маємо відому для вказаного випадку формулу Герца. При контакті циліндрів ( $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$ ) маємо лінійну залежність:

$$p = c\alpha. \quad (6)$$

Звичайно величина показника степені у виразі (5) знаходиться у межах  $1 \leq \frac{2n+1}{2n} \leq \frac{3}{2}$  [4].

Зближення циліндрів однакового радіуса і матеріалу може бути визначено за формулою [4]:

$$\alpha = \frac{2p'(1-\mu^2)}{\pi E} \ln \frac{\pi e^{\frac{2}{3}} \rho E}{p'(1-\mu^2)}. \quad (7)$$

У роботі Свекло [4] показано, що зближення двох куль за відсутності зазору між ними і миттєвому навантаженні силою  $p'$  (удар)  $\alpha_d = 1,842\alpha_{st}$ , де  $\alpha_{st} = \frac{p'}{c}$  – статична деформація куль під дією тієї ж сили.

**Методи і результати.** Розглянемо ударну взаємодію зубців однопарного зачеплення прямозубих зубчастих коліс. При цьому нехтуємо впливом згину зубців на місцеві деформації поверхонь зубців. Останні вважаємо пружними. При малих порівняно з радіусами кривизни зубців дугами їх контакту ( $\rho \gg 2a$ ) можна вважати контакт зубців, як контакт двох циліндрів однакового радіуса ( $\rho$ ). При цьому маса циліндрів буде визначатись, як приведена до ділильного кола маса зубчастих коліс, а саме:

$$m_1 = \frac{I_1}{R_1^2}; \quad m_2 = \frac{I_2}{R_2^2}; \quad (8)$$

де  $I_1, I_2$  – моменти інерції зубчастих коліс,  $\text{кгм}^2$ ;

$R_1, R_2$  – радіуси ділільних кіл відповідних зубчастих коліс, м.

Представимо рухому систему координат, початок якої відповідає миті входження в контакт циліндрів, а координати центрів мас циліндрів – відповідно  $z_1$  і  $z_2$ . Зближення циліндрів у результаті їх місцевих деформацій під дією статичної і динамічної сил  $\alpha = z_1 - z_2$ . При цьому диференціальні рівняння руху центрів мас циліндрів будуть мати вигляд:

$$m_1 \ddot{z}_1 = p' - p, \tag{9}$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = -p' + p. \tag{10}$$

Розділивши (9) і (10) відповідно на  $m_1$  і  $m_2$  і віднявши від першого із отриманих виразів другий, а також врахувавши, що  $\ddot{\alpha} = \ddot{z}_1 - \ddot{z}_2$ , отримаємо:

$$\ddot{\alpha} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (p' - p). \tag{11}$$

Позначивши через  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  сумарну наведену масу зубчастих коліс, отримаємо диференціальне рівняння:

$$m \ddot{\alpha} = p' - p. \tag{12}$$

Врахуємо формулу (5), представимо  $\ddot{\alpha} = \frac{d}{dt}(\dot{\alpha})$  і помножимо вираз (12) на  $d\alpha$ . Після цього інтегруємо скореговане диференціальне рівняння. В результаті отримаємо:

$$\frac{1}{2} m \dot{\alpha}^2 = p' \alpha - \frac{2nc}{4n+1} \alpha^{\frac{4n+1}{2n}} + C. \tag{13}$$

При  $t=0$   $\alpha=0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = V_r$ , де  $V_r$  – відносна швидкість циліндрів у момент їх початкового контакту. Тоді  $C = \frac{V_r^2}{2}$  і рівняння (13) набуває вигляду:

$$\dot{\alpha}^2 - V_r^2 = \frac{2p'\alpha}{m} - \frac{4nc}{(4n+1)m} \alpha^{\frac{4n+1}{2n}}. \tag{14}$$

Розглянемо випадок, коли у початкову мить контакту циліндрів їх відносна швидкість  $V_r = 0$  і до циліндрів докладено ударне навантаження інтенсивності  $p'$ . Тоді із (14) маємо:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{2p'\alpha}{m} - \frac{4nc}{(4n+1)m} \alpha^{\frac{4n+1}{2n}}. \tag{15}$$

У мить максимального зближення циліндрів  $\dot{\alpha} = 0$ . Враховуючи останнє, із (15) отримаємо:

$$\alpha = \left( \frac{4n+1}{2nc} p' \right)^{\frac{2n}{2n+1}} = \left[ \alpha_{st} \left( \frac{4n+1}{2n} \right) \right]^{\frac{2n}{2n+1}}. \tag{16}$$

При ударному навантаженні куль за відсутності зазору між ними, а також, враховуючи, що при цьому  $n=1$ , із (16) отримаємо, як і в роботі [4],  $\alpha = 1,842 \alpha_{st}$ . В аналогічному випадку для контактної взаємодії циліндрів ( $n \rightarrow \infty$ ) –  $\alpha = 2 \alpha_{st}$ .

Розглядаючи загальний випадок ( $V_r \neq 0$ ) і диференціюючи вираз (15) за часом, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\ddot{\alpha} + \frac{c}{m} \alpha^{\frac{2n+1}{2n}} = \frac{p'}{m}. \quad (17)$$

При ударній взаємодії циліндрів диференціальне рівняння (17) стає лінійним, а саме:

$$\ddot{\alpha} + \frac{c}{m} \alpha = \frac{p'}{m}. \quad (18)$$

Розв'язок диференціального рівняння (19) отримаємо у вигляді:

$$\alpha = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{p'}{c}, \quad (19)$$

де  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – циклічна частота коливань при ударі, рад/с.

Після диференціювання за часом останнього виразу отримаємо:

$$\dot{\alpha} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (20)$$

При  $t=0$   $\alpha=0$  і  $\dot{\alpha}(0)=V_r$ . Із (19) і (20) маємо  $C_1 = -\frac{p'}{c}$ ;  $C_2 = \frac{V_r}{\omega_0}$ .

Після підстановки в (19) сталих інтегрування знаходимо:

$$\alpha = \frac{p'}{c} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{V_r}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (21)$$

Оскільки  $\frac{p'}{c} = \alpha_{st}$ , то при  $V_r = 0$  і  $\cos \omega_0 t = -1$  із (21) маємо, як і під час використання формули (16)  $\alpha = 2\alpha_{st}$ .

При  $V_r \neq 0$  і  $\sin \omega_0 t = 1$  ( $\cos \omega_0 t = 0$ ) із (21) отримаємо:

$$\alpha = \frac{p'}{c} \left(1 + \frac{V_r c}{\omega_0 p'}\right) = \alpha_{st} \left(1 + \frac{V_r c}{\omega_0 p'}\right). \quad (22)$$

За наявності зазору між циліндрами (між зубцями зубчастих коліс) до удару, як було встановлено в роботі [3] (формула (6.4)):

$$V_r = \sqrt{\frac{2\Delta \cdot P}{m_1}} = \sqrt{\frac{2\Delta \cdot p' \cdot b}{m_1}}, \quad (23)$$

де  $\Delta$  – зазор між зубцями коліс, м;

$b$  – ширина зубця, м.

Підставляючи (23) у (22), враховуючи значення  $\omega_0$  і наведену масу коліс, отримаємо:

$$\alpha = \alpha_{st} \left(1 + \sqrt{\frac{2\Delta \cdot m_2 c b}{(m_1 + m_2) p'}}\right). \quad (24)$$

Для лінійної залежності між динамічною (статичною) силою, яка виникає під час деформації зубців, і величиною деформації поверхонь зубців (вираз (6)) можемо записати відношення між максимально допустимою динамічною силою  $p_{\max}$  і інтенсивністю зовнішнього навантаження  $p'$ , а саме:

$$\frac{P_{\max}}{p'} = \frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{st}} \tag{25}$$

Враховуючи (25), із (23) отримаємо формулу для визначення гранично допустимого зазору у спряженні між зубцями прямозубої шестеренної зубчастої передачі у вигляді:

$$\Delta_{\max} = \frac{(m_1 + m_2) p' k_1^2}{2m_2 c b}, \tag{26}$$

де  $k_1 = \frac{P_{\max}}{p'} - 1$  – коефіцієнт динамічності навантаження,

$P_{\max} = \frac{2,862 \sigma_{\max}^2 \rho}{E}$ . Остання формула отримана із виразу (4), враховуючи, що  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  і  $E_1 = E_2 = E$ .

Із формул (6) і (7) при  $V_r = 0$  знаходимо:

$$c = \frac{\pi \cdot E}{2(1 - \mu^2) \ln \frac{\pi e^{2/3} \rho E}{p'(1 - \mu^2)}} \tag{27}$$

Для сталених зубчастих коліс можна приймати  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, а модуль Пуассона –  $\mu \approx 0,3$ . У цьому випадку:

$$c = \frac{3,523 \cdot 10^{11}}{\ln \left( 13,45 \cdot 10^{11} \cdot \frac{\rho}{p'} \right)} \tag{28}$$

Наприклад, для ведучої шестерні коробки відбору потужності автоцистерни АЦ-63Б  $p' = 410650$  Н/м із формули (28) знаходимо  $c = 2,72 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Залежність коефіцієнта  $c$  від інтенсивності навантаження зубця  $p'$  наведено на рис. 1 (значення параметрів у системі СИ).

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad \mu := 0.3 \quad e^{2/3} = 1.948 \quad \rho := 0.1 \quad N := 10 \quad i := 0..10 \quad p_i := (1 + i) \cdot 10^5$$

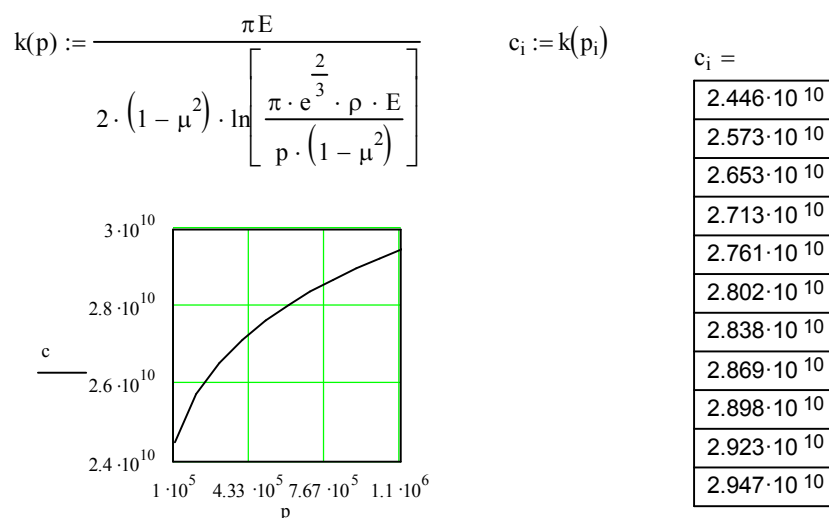


Рис. 1. Залежність коефіцієнта  $c$  від інтенсивності навантаження –  $p'$

Із рис. 1 видно, що під час зростання інтенсивності навантаження на порядок коефіцієнт  $C$  зростає приблизно на 20%. Під час зростання радіуса кривизни –  $\rho$  з 0,05 до 0,15 м коефіцієнт  $c$  зменшується приблизно на 9% (рис. 2). Формула (27) вказує також на залежність указанного коефіцієнта від модуля пружності  $E$  і від коефіцієнта Пуассона  $\mu$ , що потрібно враховувати у випадках, коли зубчасті шестерні виготовлені не зі сталі.

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad \mu := 0.3 \quad e^3 = 1.948 \quad \rho := 5 \cdot 10^5 \quad N := 10 \quad i := 0..10 \quad \rho_i := 0.05 + 0.01 \cdot i$$

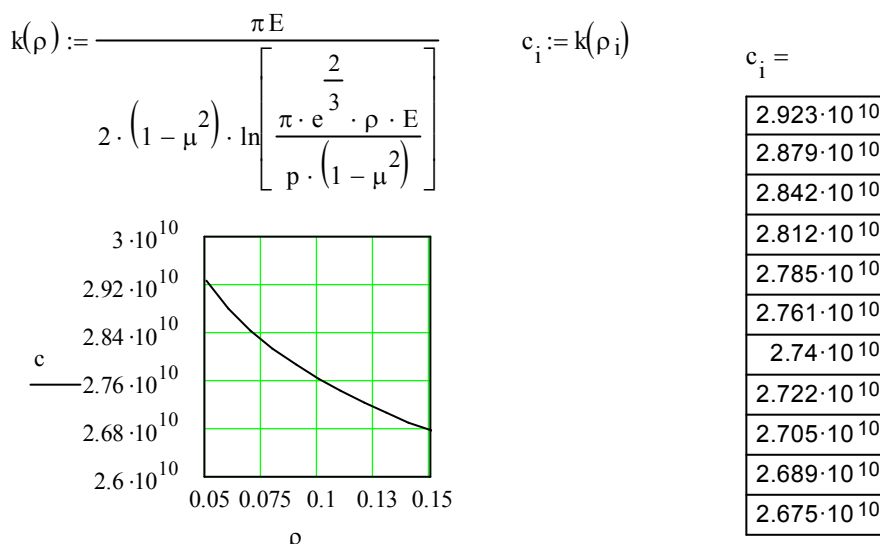


Рис. 2. Залежність коефіцієнта  $c$  від радіуса кривизни зубця –  $\rho$

Гранично допустимий зазор між зубцями прямозубих шестеренчастих передач визначається за формулою (26), з якої видно, що він залежить від інтенсивності навантаження зубців, коефіцієнта динамічності навантаження, маси зубчастих коліс, а також від коефіцієнта, який характеризує кривизну контактуючих поверхонь зубців та пружності матеріалу, з якого виготовляються колеса.

Наприклад, проведемо розрахунок гранично допустимого зазору між зубцями шестерень коробки відбору потужності автоцистерни АЦ-63Б, прийнявши такі дані: допустиме контактне напруження для хромистої сталі  $[\sigma]=12 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ , маси коліс  $m_1 = 1,5 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 3 \text{ кг}$ , інтенсивність навантаження  $p' = 410650 \text{ Н/м}$ ,  $c = 2,72 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 0,1 \text{ м}$ ,

динамічна сила  $p_{\max} = \frac{2,862 \cdot 144 \cdot 10^{16} \cdot 0,1}{2 \cdot 10^{11}} = 2,055 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ , коефіцієнт динамічності на-

вантаження  $k_1 = \frac{p_{\max}}{p'} - 1 = \frac{2,055 \cdot 10^6}{4,1065 \cdot 10^5} - 1 \approx 4$ ; гранично допустимий зазор

$$\Delta_{\max} = \frac{0,75 \cdot 410650 \cdot 16}{2,72 \cdot 10^{10}} \approx 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Якщо припустити, що  $V_r \rightarrow 0$  (тобто  $\Delta \rightarrow 0$ ), і при цьому, як було встановлено раніше,  $\frac{\alpha}{\alpha_{st}} = 2$ , то із виразу (26) отримаємо формулу для визначення мінімального зазору у спряженні зубців, а саме:

$$\Delta_{\min} = \frac{(m_1 + m_2) p'}{2m_2 c}. \tag{29}$$

Підставляючи у формулу (29) наведені у прикладі значення параметрів, знаходимо  $\Delta_{\min} \approx 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ .

На рис. 3 показана залежність гранично допустимого зазору між зубцями прямозубих коліс від допустимого контактного напруження, яке, як видно із наведеного розрахунку і рис. 3, найбільш суттєво впливає на величину гранично допустимого зазору.

$$E := 2 \cdot 10^{11} \quad \rho := 0.1 \quad p := 4 \cdot 10^5 \quad m_1 := 1.5 \quad m_2 := 3 \quad c := 2.72 \cdot 10^{10} \quad N := 10 \quad i := 0..N$$

$$\sigma_i := 5 \cdot 10^8 + i \cdot 10^8 \quad \Delta(\sigma) := \frac{(m_1 + m_2) \cdot p \cdot \left( \frac{2.862 \cdot \sigma^2 \cdot \rho}{p \cdot E} - 1 \right)^2}{2m_2 \cdot c} \quad \Delta_{\max i} := \Delta(\sigma_i)$$

	0
0	$1.231 \cdot 10^{-7}$
1	$9.142 \cdot 10^{-7}$
2	$6.253 \cdot 10^{-6}$
3	$1.834 \cdot 10^{-5}$
4	$3.972 \cdot 10^{-5}$
5	$7.327 \cdot 10^{-5}$
6	$1.222 \cdot 10^{-4}$
7	$1.901 \cdot 10^{-4}$
8	$2.808 \cdot 10^{-4}$
9	$3.986 \cdot 10^{-4}$
10	$5.481 \cdot 10^{-4}$

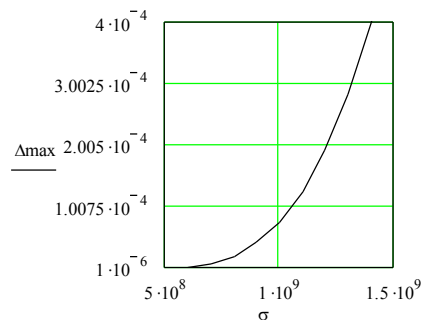


Рис. 3. Залежність гранично допустимого зазору між зубцями коліс від допустимого контактного напруження

Розглянута методика дозволяє визначати поверхневу деформацію зубців зубчастої передачі в зоні їх контакту залежно від зазору між зубцями, збуджуючих, інерційних, жорсткісних та демпфіруючих параметрів динамічної системи.

### Список використаних джерел

1. Динник А. Н. Избранные труды / А. Н. Динник. – К. : Изд-во АН УССР, 1952. – Т. 1. – 114 с.
2. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел / А. Н. Динник. – К. : КПИ, 1909. – 113 с.
3. Костарчук Ю. В. Динаміка зубчастого зацеплення з урахуванням зазору у спряженні зубців / Ю. В. Костарчук, І. М. Хоменко // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. – 2005. – № 22. – С. 54–60.
4. Свекло В. А. Некоторые вопросы соударения упругих тел / В. А. Свекло // Контактные задачи и их инженерные приложения. – М. : НИИМАШ, 1969. – С. 182–186.
5. Сопротивление материалов / под ред. Г. С. Писаренко. – К. : Гостехиздат Украины, 1963. – 792 с.
6. Штаерман А. Я. Контактная задача теории упругости / А. Я. Штаерман. – М. : Гостехиздат, 1949. – 192 с.