

## РОЗДІЛ I. МЕХАНІКА

УДК 539.3:539.4

Віталій Грицюк

### РОЗРАХУНОК ПОПЕРЕЧНОГО УДАРУ ТІЛОМ ПО ВІЛЬНОМУ СТЕРЖНЮ

Віталій Грицюк

### РАСЧЁТ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ТЕЛОМ ПО СВОБОДНОМУ СТЕРЖНЮ

Vitalii Hrytsiuk

### CALCULATION OF TRANSVERSAL IMPACT BY A BODY ON A FREE ROD

Існують різні моделі ударної взаємодії тіл. Найбільш досконалою можна вважати модель С.П. Тимошенка, яка проілюстрована розрахунком удару тіла по шарнірно опертій балці. Враховуються не тільки деформації балки, але й місцеві деформації обох тіл, що взаємодіють. Розглянуто поперечний удар тілом по вільному стержню.

**Ключові слова:** розрахунок, вільний стержень, тіло, удар.

Рис.: 3. Бібл.: 9.

Существуют различные модели ударного взаимодействия тел. Наиболее совершенной можно считать модель С.П. Тимошенко, которая проиллюстрирована расчетом удара тела по шарнирно опертой балке. Учитываются не только деформации балки, но и местные деформации обоих взаимодействующих тел. Рассмотрен поперечный удар телом по свободному стержню.

**Ключевые слова:** расчёт, свободный стержень, тело, удар.

Рис.: 3. Библ.: 9.

There are various models of the impact of bodies. The most perfect can consider model of S. P. Timoshenko which is illustrated with impact of a body on a beam on hinge supports. Are considered not only deformations of a beam, but also local deformations of both interacting bodies. In this work the transversal impact to a free rod is considered by a body.

**Key words:** calculation, free rod, body, impact.

Fig.: 3. Bibl.: 9.

**Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій, виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми, мета статті.** Широко відома модель С.П. Тимошенка – розрахунок балки на дію поперечного удару тілом [1]. Ця модель враховує місцеві деформації під час взаємодії тіла і балки. Вона проілюстрована розрахунком удару тіла по шарнірно опертій балці. У дослідженнях [2–7] також розглядався удар по кінематично незмінюваним системам. У цій статті проаналізовано удар тілом по балці без опор (по кінематично змінюваній системі). Математична реалізація розрахунку деформованої кінематично змінюваної системи викликає певні ускладнення. Мета цієї роботи – показати варіанти вирішення такої проблеми.

#### Математична модель

Розглянемо удар тілом по стержню (рис. 1).

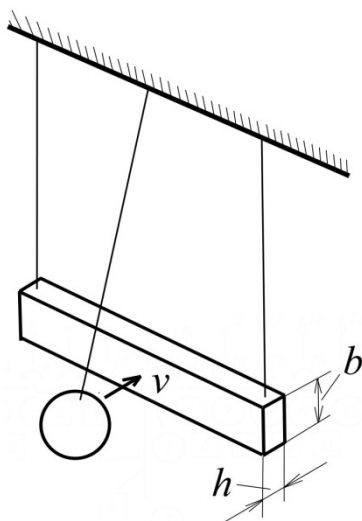


Рис. 1. Схема поперечного удару тілом по вільному стержню

Силу контактної взаємодії  $F(t)$  тіла і балки можна знайти з рівняння

$$d(F) = \alpha(F) + w_F(x_F, F), \quad (1)$$

де  $d(F)$  – переміщення тіла;

$\alpha(F)$  – переміщення тіла, викликані контактними деформаціями у місці взаємодії тіл (тіла і стержня);

$w_F(x_F, F)$  – переміщення стержня у місці знаходження тіла;

$x_F$  – координата місця знаходження тіла на подовжній осі стержня.

Рівняння (1) є відомим рівнянням поперечного удару тілом по балці, запропонованого С.П. Тимошенком [1].

Переміщення тіла  $d$  можна визначити за допомогою формули

$$d(t) = d_0 + \dot{d}_0 t + g \frac{t^2}{2} - \frac{1}{M_G} \int_0^t F(t_1)(t - t_1) dt_1, \quad (2)$$

де  $d_0, \dot{d}_0$  – початкові переміщення і швидкість тіла;

$g$  – прискорення земного тяжіння;

$M_G$  – маса тіла;

$t$  – час.

Якщо удар не вертикальний, а боковий (рис. 1), то третій доданок у формулі (2) не враховується.

Переміщення  $\alpha$  можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Переміщення стержня можна моделювати різними способами.

### Варіант 1.

Спочатку розглянемо застосування *методу скінченних елементів* для опису руху стержня. Взагалі цей метод застосовується для розрахунку кінематично незмінюваних систем. Вільний стержень (рис. 2, а) за допомогою введення фіктивного елемента малої жорсткості перетворюємо у кінематично незмінювану систему (рис. 2, б). Цю систему моделюємо скінченними елементами. На рис. 2, в показані номери переміщень вузлів системи (їх 22), у кружечках наведені номери вузлів (їх 12), у прямокутниках наведені номери елементів (їх 11). Треба зауважити, що варіанти перетворення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану можуть бути різними. Наприклад, можна ввести два фіктивні елементи по кінцях стержня.

Рівняння руху записуються у вигляді

$$[M] \left\{ \ddot{\delta} \right\} + [C] \left\{ \dot{\delta} \right\} + [K] \left\{ \delta \right\} = \{F(t)\}, \quad (3)$$

де  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  – матриці інерційної властивості системи, розсіяння енергії системи, жорсткості системи;

$\left\{ \ddot{\delta} \right\}$ ,  $\left\{ \dot{\delta} \right\}$ ,  $\left\{ \delta \right\}$  – вектори прискорень, швидкостей, переміщень системи;

$\{F(t)\}$  – вектор вузлових зведених збурюючих сил.

Для стержня початкові умови нульові

$$\left\{ \delta \right\} = 0, \quad \left\{ \dot{\delta} \right\} = 0. \quad (4)$$

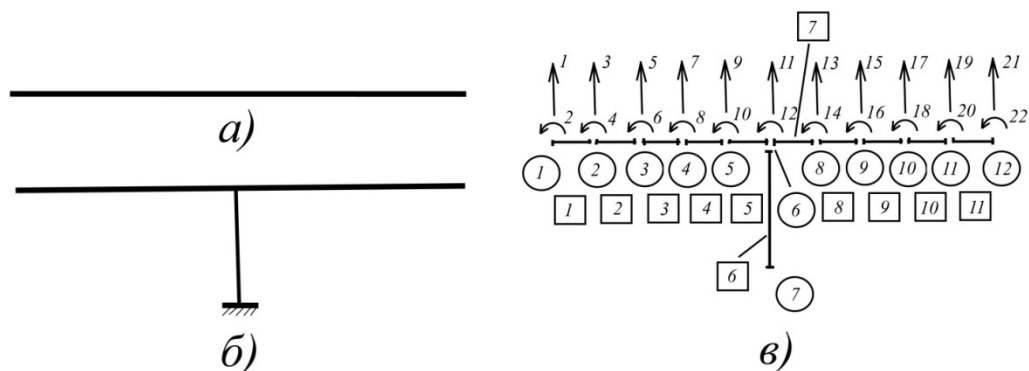


Рис. 2. Моделювання вільного стержня (балки) методом скінченних елементів

Розкладаємо цей рух за власними формами

$$\{\delta\} = [\Phi]\{T\}, \tag{5}$$

де  $[\Phi]$  – матриця власних форм власних форм коливань  $\{\varphi_i\}$   $\{\varphi_i\}$ ;

$\{T\}$  – вектор функцій часу  $t$ .

Якщо розсіяння енергії мале, то, не враховуючи його, із загальної проблеми власних значень

$$[K][\Phi] - \omega^2[M][\Phi] = 0, \tag{6}$$

за допомогою методу Якобі знайдемо частоти власних коливань системи  $\omega_i$  і відповідні їм вектори форм коливань  $\{\varphi_i\}$ .

Зручно вибрати такий масштаб власних форм коливань, щоб виконувалися умови нормування власних форм коливань

$$M_i = \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} = 1. \tag{7}$$

У нашому випадку перші дві частоти нульові (майже нульові завдяки введенню фіктивного елемента малої жорсткості). Перша частота відповідає поступальному руху стержня без урахування деформацій, друга – обертальному руху тіла без урахування деформацій.

Потім систему пов’язаних рівнянь (3) зручно звести до системи непов’язаних рівнянь

$$\ddot{T}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{T}_i + \omega_i^2 T_i = f_i(t), \tag{8}$$

де узагальнена сила

$$f_i = \{\varphi_i\}^T \{F(t)\}, \tag{9}$$

а початкові умови

$$T_i(0) = \frac{\{\varphi_i\}^T [M] \{\delta(0)\}}{M_i}, \quad \dot{T}_i(0) = \frac{\{\varphi_i\}^T [M] \{\dot{\delta}(0)\}}{M_i}. \tag{10}$$

Метод розкладання за власними формами можливий уразі виконання умов ортогональності

$$\{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_j\} = 0, \quad i \neq j, \tag{11}$$

$$\{\varphi_i\}^T [K] \{\varphi_j\} = 0, \quad i \neq j, \tag{12}$$

$$\{\varphi_i\}^T [C] \{\varphi_j\} = 0, \quad i \neq j. \quad (13)$$

Перші дві умови звичайно задовольняються (не задовольняються для двох форм з однаковими частотами). А остання умова – лише приспеціальних видах матриці розсіяння енергії  $[C]$ .

Можна застосувати модель затухання коливань Релея, за якої матриця  $[C]$  у матричному рівнянні (3) записується у вигляді

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K], \quad (14)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – константи, які треба визначити за двома значеннями коефіцієнтів демпфірування для двох різних власних частот.

При нормованих власних формах (10) можна записати

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\xi_i. \quad (15)$$

Застосовуючи (15) для двох форм, із системи двох алгебраїчних рівнянь одержуємо значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$ . Тоді для всіх форм

$$\xi_i = \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{2\omega_i}. \quad (16)$$

Існують різні чисельні методи реалізації задачі. Одним із сучасних ефективних методів є метод Ньюмарка [8]. Цей метод можна застосувати як для системи пов'язаних рівнянь (3), так і для кожного непов'язаного рівняння (7).

### Варіант 2.

Переміщення стержня у місці знаходження тіла можна записати у вигляді

$$w_F(x_F, F) = d^*(x_F, F) + w_F^*(x_F, F). \quad (17)$$

де  $d^*(x_F, F)$  – переміщення стержня, як недеформованого, у місці взаємодії тіл;

$w_F^*(x_F, F)$  – переміщення стержня, пов'язані тільки з його деформаціями, у місці взаємодії тіл.

Перші переміщення у нашому випадку можна визначити таким чином

$$d^*(x_F, F) = d_0^*(x_F, F) + \dot{d}_0^*(x_F, F)t + g\frac{t^2}{2} + \frac{1}{M_B} \int_0^t F(t_1)(t-t_1)dt_1, \quad (18)$$

де  $M_B$  – маса стержня.

У формулі (18) для нашого випадку  $g = 0$  і початкові умови нульові.

Для врахування розсіяння енергії у матеріалі стержня пружні характеристики його матеріалу запишемо у комплексній формі

$$E = E(1 \pm i\beta), \quad (19)$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу балки;

$\beta$  – коефіцієнт розсіяння енергії у матеріалі балки;

$i$  – уявна одиниця.

Розкладаючи переміщення стержня і навантаження у тригонометричні ряди, одержуємо

$$w^*(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \cdot T_j(t). \quad (20)$$

Для вільного стержня (балки) довжиною  $l$  (рис. 1, б) власні форми коливань балки [9]

$$X_j(x) = (ch\alpha_j l - \cos\alpha_j l)(sh\alpha_j x + \sin\alpha_j l) - (sh\alpha_j l - \sin\alpha_j l)(ch\alpha_j x + \cos\alpha_j x). \quad (21)$$

Числа  $\alpha_j$  треба визначати з рівнянь

$$\cos\alpha_j l \cdot ch\alpha_j l = 1. \quad (22)$$

Функції часу

$$T_j(t) = e^{-\mu_j t} \left[ T_j(0) \left( \frac{\mu_j}{\omega_j} \sin \omega_j t + \cos \omega_j t \right) + \frac{\dot{T}_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right] + \frac{X_j(x_F)}{m \cdot \int_0^l X_j(x)^2 dx \cdot \omega_j} \int_0^t F(t_1) \cdot e^{-\mu_j(t-t_1)} \cdot \sin \omega_j(t-t_1) dt_1, \quad (23)$$

$$\omega_j = \alpha_j^2 \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{m}}, \quad \mu_j = \frac{\beta}{2} \omega_j = \frac{\psi}{4\pi} \omega_j, \quad (24)$$

де  $\omega_j$  – частоти власних коливань балки;

$m$  – маса одиниці довжини балки;

$I_z$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

### Приклад розрахунку

Розглянемо боковий удар (горизонтальний удар, тоді у формулі (3)  $g = 0$ , тобто вага тіла не враховується) по середині вільного сталевго стержня (рис. 1) довжиною  $l = 20,0$  см прямокутного поперечного перерізу  $h = 1,0$  см і  $b = 1,2$  см. Ударяє сталева куля, радіус якої  $R = 1,0$  см, з початковою швидкістю  $1,0$  см/с.

Вибраний крок часу (крок інтегрування рівнянь)  $\tau$  дорівнює  $1/100$  періоду першого тону власних коливань стержня, пов'язаних з деформаціями стержня. Під час застосування методу скінченних елементів (варіант 1) це є третій період власних коливань балки (перші дві частоти нульові). Сила  $F$  визначалася із точністю до 1 %. У ході визначення переміщень і напружень було враховано 10 форм коливань балки. Розсіяння енергії враховувалося при  $\xi_3 = 0,015$  і  $\xi_4 = 0,015$ . Коефіцієнт розсіяння енергії  $\psi = 0,3$  (для розрахунків за варіантом 2).

Результати розрахунків для різних способів зведення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану збігаються. Результати розрахунків за варіантами 1 і 2 також збігаються.

Результати розрахунків наведені на рис. 3.

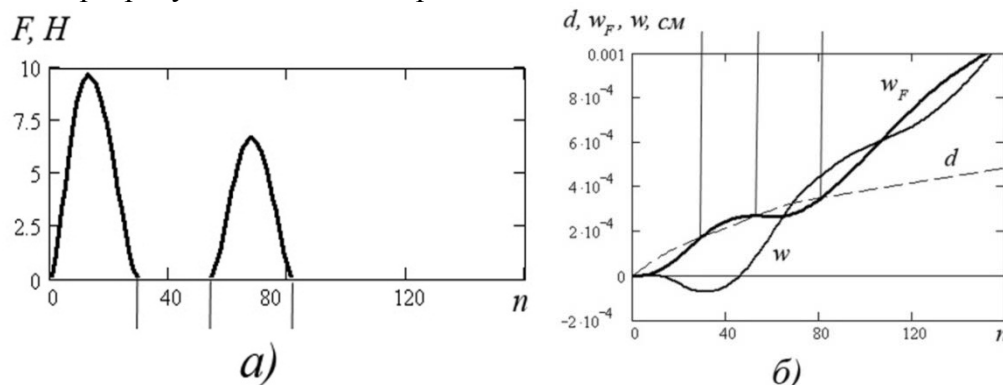


Рис. 3. Результати розрахунків

На рис. 3, а представлена сила контактної взаємодії між тілом і стержнем  $F(t)$ .

На рис. 3, б – переміщення тіла  $d$ ; переміщення перерізу стержня, в якому відбувається удар,  $w_F$ ; переміщення кінців стержня  $w$ .

**Висновки і пропозиції.** Наведено розрахунки поперечного удару тілом по вільному стержню (вільній балці). Це може бути цікавим з наукового погляду і корисним в інженерній практиці.

Проілюстровано два варіанти моделювання руху вільного стержня.

Перший варіант: конструкція моделюється за допомогою методу скінченних елементів. При цьому для перетворення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану вводяться фіктивні елементи дуже малої жорсткості. Цей варіант дещо трудомісткий, але може бути застосований для досить складних вільних систем.

Другий варіант: окремо розглядаються переміщення стержня без урахування деформацій і з урахуванням деформацій. Останні моделюються за допомогою розкладання переміщень у тригонометричні ряди. Цей варіант зручний під час застосування сучасних математичних пакетів (програм).

#### Список використаних джерел

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит; пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лузина. – М.: Стройиздат, 1965. – 447 с.
3. Кильчевский Н.А. Теория соударения твёрдых тел / Н. А. Кильчевский. – К.: Наукова думка, 1969. – 247 с.
4. Расчёты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарёв, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др. – М.: Машиностроение, 1958. – 884 с.
5. Ольшанский В. П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Х.: Миськдрук, 2012. – 320 с.
6. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 339 с.
7. Грицюк В. Ю. Розрахунок удару тілом по консольній балці / В. Ю. Грицюк // Технологічні науки та технології: науковий журнал. – 2015. – № 1(1). – С. 9–14.
8. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов: пер. с англ. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
9. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 томах. Т. 3 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.

#### References

1. Tymoshenko, S.P. (1967). *Kolebaniia v inzhenernom dele [Fluctuations in engineering]*. Moscow: Nauka, 444 p. (in Russian).
2. Goldsmit, V. (1965). *Udar. Teoriia i fizicheskie svoistva soudariaemykh tel [Impact. Theory and physical properties of colliding bodies]*. (Luzhina, M. S., Luzhin, O. V., Trans.). Moscow: Stroiiizdat, 447 p. (in Russian).
3. Kilchevskii, N.A. (1969). *Teoriia soudareniya tverdykh tel [The theory of the impact of solid bodies]*. Kiev: Naukova dumka, 247 p. (in Russian).
4. Ponomarev, S.D., Biderman, V.L., Likharev, K.K. et al. (1958). *Raschety na prochnost v mashinostroenii [Strength calculation in machine building]*. Moscow: Mashinostroenie, 884 p. (in Russian).
5. Olshanskii, V.P., Tishchenko, L.N., Olshanskii, S.V. (2012). *Kolebaniia sterzhnei i plastin pri mekhanicheskom udare [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]*. Kharkiv: Miskdruk, 320 p. (in Russian).
6. Goloskokov, E.G., Filippov, A.P. (1977). *Nestatsionarnye kolebaniia deformiruemykh sistem [Nonstationary vibrations of deformable systems]*. Kiev: Naukova dumka, 339 p. (in Russian).
7. Hrytsiuk, V.Yu. (2015). Rozrakhunok udaru tilom po konsolnii baltsi [Calculation of a body impact on a cantilever beam]. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii: naukovyi zhurnal – Technical sciences and technology: Scientific journal*, no. 1(1), pp. 9–14 (in Ukrainian).
8. Bate, K. (1982). *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical Method and the Finite Element Analysis]* (Bate, K., Vilsion, E., trans.). Moscow: Stroiiizdat, p. 448 (in Russian).
9. Birgera, I.A., Panovko, Ia.G. (eds.) (1968). *Prochnost, ustoychivost, kolebaniia [Strength, Stability, fluctuations]*. (Vols. 1-3). Moscow: Mashinostroenie, vol. 3, 567 p. (in Russian).

**Грицюк Віталій Юхимович** – кандидат технічних наук, доцент, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14027, Україна).

**Грицюк Віталій Ефимович** – кандидат технічних наук, доцент, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, г. Чернігів, 14027, Україна).

**Hrytsiuk Vitalii** – Ph.D in Technical Sciences, Associate Professor, Chernihiv National University of Technology (95 Shevchenka Str., 14027 Chernihiv, Ukraine).

**E-mail:** hryvit@gmail.com