РОЗДІЛ І. МЕХАНІКА

УДК 539.3:539.4

Віталій Грицюк

РОЗРАХУНОК ПОПЕРЕЧНОГО УДАРУ ТІЛОМ ПО ВІЛЬНОМУ СТЕРЖНЮ

Виталий Грицюк

РАСЧЁТ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ТЕЛОМ ПО СВОБОДНОМУ СТЕРЖНЮ

Vitalii Hrytsiuk

CALCULATION OF TRANSVERSAL IMPACT BY A BODY ON A FREE ROD

Існують різні моделі ударної взаємодії тіл. Найбільш досконалою можна вважати модель С.П. Тимошенка, яка проілюстрована розрахунком удару тіла по шарнірно опертій балці. Враховуються не тільки деформації балки, але й місцеві деформації обох тіл, що взаємодіють. Розглянуто поперечний удар тілом по вільному стержню.

Ключові слова: *розрахунок, вільний стержень, тіло, удар.*

Рис.: 3. Бібл.: 9.

Существуют различные модели ударного взаимодействия тел. Наиболее совершенной можно считать модель С.П. Тимошенко, которая проиллюстрирована расчетом удара тела по шарнирно опёртой балке. Учитываются не только деформации балки, но и местные деформации обоих взаимодействующих тел. Рассмотрен поперечный удар телом по свободному стержню.

Ключевые слова: *расчёт, свободный стержень, тело, удар.*

Рис.: 3. Библ.: 9.

There are various models of the impact of bodies. The most perfect can consider model of S. P. Timoshenko which is illustrated with impact of a body on a beam on hinge supports. Are considered not only deformations of a beam, but also local deformations of both interacting bodies. In this work the transversal impact to a free rod is considered by a body.

Key words: *calculation, free rod, body, impact.*

Fig.: 3. Bibl.: 9.

Постановка проблеми, аналіз останніх досліджень і публікацій, виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми, мета статті. Широко відома модель С.П. Тимошенка – розрахунок балки на дію поперечного удару тілом [1]. Ця модель враховує місцеві деформації під час взаємодії тіла і балки. Вона проілюстрована розрахунком удару тіла по шарнірно опертій балці. У дослідженнях [2–7] також розглядався удар по кінематично незмінюваним системам. У цій статті проаналізовано удар тілом по балці без опор (по кінематично змінюваній системі). Математична реалізація розрахунку деформованої кінематично змінюваної системи викликає певні ускладнення. Мета цієї роботи – показати варіанти вирішення такої проблеми.

Математична модель

Розглянемо удар тілом по стержню (рис. 1).

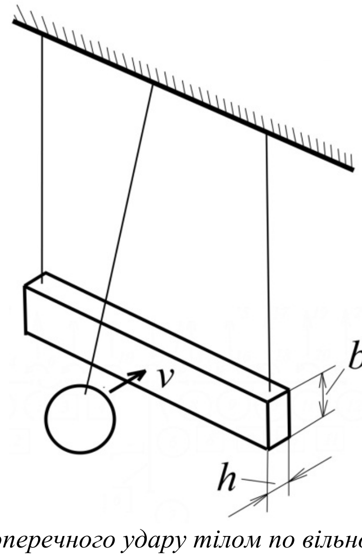

Рис. 1. Схема поперечного удару тілом по вільному стержню

Силу контактної взаємодії $F(t)$ тіла і балки можна знайти з рівняння

$$d(F) = \alpha(F) + w_F(x_F, F), \tag{1}$$

де $d(F)$ – переміщення тіла;

$\alpha(F)$ – переміщення тіла, викликані контактними деформаціями у місці взаємодії тіл (тіла і стержня);

$w_F(x_F, F)$ – переміщення стержня у місці знаходження тіла;

x_F – координата місця знаходження тіла на подовжній осі стержня.

Рівняння (1) є відомим рівнянням поперечного удару тілом по балці, запропонованого С.П. Тимошенком [1].

Переміщення тіла d можна визначити за допомогою формули

$$d(t) = d_0 + \dot{d}_0 t + g\frac{t^2}{2} - \frac{1}{M_G}\int_0^t F(t_1)(t - t_1)dt_1, \tag{2}$$

де d_0, $\dot{d}_0$ – початкові переміщення і швидкість тіла;

g – прискорення земного тяжіння;

M_G – маса тіла;

t – час.

Якщо удар не вертикальний, а боковий (рис. 1), то третій доданок у формулі (2) не враховується.

Переміщення α можна визначити за допомогою відомої статичної контактної задачі Герца.

Переміщення стержня можна моделювати різними способами.

Варіант 1.

Спочатку розглянемо застосування *методу скінченних елементів* для опису руху стержня. Взагалі цей метод застосовується для розрахунку кінематично незмінюваних систем. Вільний стержень (рис. 2, *а*) за допомогою введення фіктивного елемента малої жорсткості перетворюємо у кінематично незмінювану систему (рис. 2, *б*). Цю систему моделюємо скінченними елементами. На рис. 2, *в* показані номери переміщень вузлів системи (їх 22), у кружечках наведені номери вузлів (їх 12), у прямокутниках наведені номери елементів (їх 11). Треба зауважити, що варіанти перетворення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану можуть бути різними. Наприклад, можна ввести два фіктивні елементи по кінцях стержня.

Рівняння руху записуються у вигляді

$$[M]\left\{\ddot{\delta}\right\} + [C]\left\{\dot{\delta}\right\} + [K]\left\{\delta\right\} = \{F(t)\}, \tag{3}$$

де $[M]$, $[C]$, $[K]$– матриці інерційної властивості системи, розсіяння енергії системи, жорсткості системи;

$\left\{\ddot{\delta}\right\}$, $\left\{\dot{\delta}\right\}$, $\left\{\delta\right\}$ – вектори прискорень, швидкостей, переміщень системи;

$\{F(t)\}$ – вектор вузлових зведених збурюючих сил.

Для стержня початкові умови нульові

$$\left\{\delta\right\} = 0, \left\{\dot{\delta}\right\} = 0. \tag{4}$$

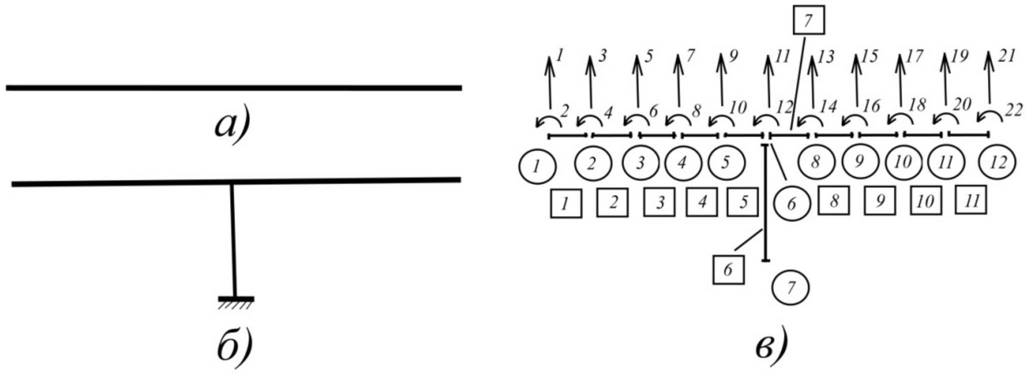

Рис. 2. Моделювання вільного стержня (балки) методом скінченних елементів

Розкладаємо цей рух за власними формами

$$\left\{\delta\right\} = \left[\Phi\right]\left\{T\right\}, \tag{5}$$

де $\left[\Phi\right]$ – матриця власних форм власних форм коливань $\left\{\varphi_i\right\}$ $\left\{\varphi_i\right\}$;

$\left\{T\right\}$ – вектор функцій часу t.

Якщо розсіяння енергії мале, то, не враховуючи його, із загальної проблеми власних значень

$$\left[K\right]\left[\Phi\right] - \omega^2\left[M\right]\left[\Phi\right] = 0, \tag{6}$$

за допомогою методу Якобі знайдемо частоти власних коливань системи ω_i і відповідні їм вектори форм коливань $\left\{\varphi_i\right\}$.

Зручно вибрати такий масштаб власних форм коливань, щоб виконувалися умови нормування власних форм коливань

$$M_i = \left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\varphi_i\right\} = 1. \tag{7}$$

У нашому випадку перші дві частоти нульові (майже нульові завдяки введенню фіктивного елемента малої жорсткості). Перша частота відповідає поступальному руху стержня без урахування деформацій, друга – обертальному руху тіла без урахування деформацій.

Потім систему пов’язаних рівнянь (3) зручно звести до системи непов’язаних рівнянь

$$\ddot{T}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{T}_i + \omega_i^2 T_i = f_i(t), \tag{8}$$

де узагальнена сила

$$f_i = \left\{\varphi_i\right\}^T\left\{F(t)\right\}, \tag{9}$$

а початкові умови

$$T_i(0) = \frac{\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\delta(0)\right\}}{M_i}, \quad \dot{T}_i(0) = \frac{\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\dot{\delta}(0)\right\}}{M_i}. \tag{10}$$

Метод розкладання за власними формами можливий уразі виконання умов ортогональності

$$\left\{\varphi_i\right\}^T\left[M\right]\left\{\varphi_j\right\} = 0,\ i \neq j, \tag{11}$$

$$\left\{\varphi_i\right\}^T\left[K\right]\left\{\varphi_j\right\} = 0,\ i \neq j, \tag{12}$$

$$\{\varphi_i\}^T[C]\{\varphi_j\}=0,\ i\neq j\,. \tag{13}$$

Перші дві умови звичайно задовольняються (не задовольняються для двох форм з однаковими частотами). А остання умова – лише приспеціальних видах матриці розсіяння енергії $[C]$.

Можна застосувати модель затухання коливань Релея, за якої матриця $[C]$ у матричному рівнянні (3) записується у вигляді

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K], \tag{14}$$

де α і β – константи, які треба визначити за двома значеннями коефіцієнтів демпфірування для двох різних власних частот.

При нормованих власних формах (10) можна записати

$$\alpha+\beta\omega_i^2=2\omega_i\xi_i\,. \tag{15}$$

Застосовуючи (15) для двох форм, із системи двох алгебраїчних рівнянь одержуємо значення коефіцієнтів α і β. Тоді для всіх форм

$$\xi_i=\frac{\alpha+\beta\omega_i^2}{2\omega_i}\,. \tag{16}$$

Існують різні чисельні методи реалізації задачі. Одним із сучасних ефективних методів є метод Ньюмарка [8]. Цей метод можна застосувати як для системи пов’язаних рівнянь (3), так і для кожного непов’язаного рівняння (7).

Варіант 2.

Переміщення стержня у місці знаходження тіла можна записати у вигляді

$$w_F(x_F,F)=d^*(x_F,F)+w_F^*(x_F,F). \tag{17}$$

де $d^*(x_F,F)$ – переміщення стержня, як недеформованого, у місці взаємодії тіл;

$w_F^*(x_F,F)$ – переміщення стержня, пов’язані тільки з його деформаціями, у місці взаємодії тіл.

Перші переміщення у нашому випадку можна визначити таким чином

$$d^*(x_F,F)=d_0^*(x_F,F)+\dot{d}_0^*(x_F,F)t+g\frac{t^2}{2}+\frac{1}{M_B}\int_0^t F(t_1)(t-t_1)dt_1, \tag{18}$$

де M_B – маса стержня.

У формулі (18) для нашого випадку $g=0$ і початкові умови нульові.

Для врахування розсіяння енергії у матеріалі стержня пружні характеристики його матеріалу запишемо у комплексній формі

$$E=E(1\pm i\beta)\,, \tag{19}$$

де E – модуль Юнга матеріалу балки;

β – коефіцієнт розсіяння енергії у матеріалі балки;

i – уявна одиниця.

Розкладаючи переміщення стержня і навантаження у тригонометричні ряди, одержуємо

$$w^*(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}X_j(x)\cdot T_j(t)\,. \tag{20}$$

Для вільного стержня (балки) довжиною l (рис. 1, *б*) власні форми коливань балки [9]

$$X_j(x) = (ch\alpha_j l - \cos\alpha_j l)(sh\alpha_j x + \sin\alpha_j l) - (sh\alpha_j l - \sin\alpha_j l)(ch\alpha_j x + \cos\alpha_j x). \qquad (21)$$

Числа α_j треба визначати з рівнянь

$$\cos\alpha_j l \cdot ch\alpha_j l = 1. \qquad (22)$$

Функції часу

$$T_j(t) = e^{-\mu_j t}\left[T_j(0)\left(\frac{\mu_j}{\omega_j}\sin\omega_j t + \cos\omega_j t\right) + \frac{\dot{T}_j}{\omega_j}\sin\omega_j t\right] +$$
$$+\frac{X_j(x_F)}{m\cdot\int_0^l X_j(x)^2 dx\cdot\omega_j}\int_0^t F(t)\cdot e^{-\mu_j(t-t_1)}\cdot\sin\omega_j(t-t_1)dt_1, \qquad (23)$$

$$\omega_j = \alpha_j^2\sqrt{\frac{E\cdot I_z}{m}}, \quad \mu_j = \frac{\beta}{2}\omega_j = \frac{\psi}{4\pi}\omega_j, \qquad (24)$$

де ω_j – частоти власних коливань балки;

m – маса одиниці довжини балки;

I_z – осьовий момент інерції поперечного перерізу балки.

Приклад розрахунку

Розглянемо боковий удар (горизонтальний удар, тоді у формулі (3) $g = 0$, тобто вага тіла не враховується) по середині вільного сталевого стержня (рис. 1) довжиною l = 20,0 см прямокутного поперечного перерізу h =1,0 см і b =1,2 см. Ударяє сталева куля, радіус якої R =1,0 см, з початковою швидкістю 1,0 см/с.

Вибраний крок часу (крок інтегрування рівнянь) τ дорівнює 1/100 періоду першого тону власних коливань стержня, пов'язаних з деформаціями стержня. Під час застосування методу скінченних елементів (варіант 1) це є третій період власних коливань балки (перші дві частоти нульові). Сила F визначалася із точністю до 1 %. Уході визначення переміщень і напружень було враховано 10 форм коливань балки. Розсіяння енергії враховувалося при $\xi_3 = 0{,}015$ і $\xi_4 = 0{,}015$. Коефіцієнт розсіяння енергії $\psi = 0{,}3$ (для розрахунків за варіантом 2).

Результати розрахунків для різних способів зведення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану збігаються. Результати розрахунків за варіантами 1 і 2 також збігаються.

Результати розрахунків наведені на рис. 3.

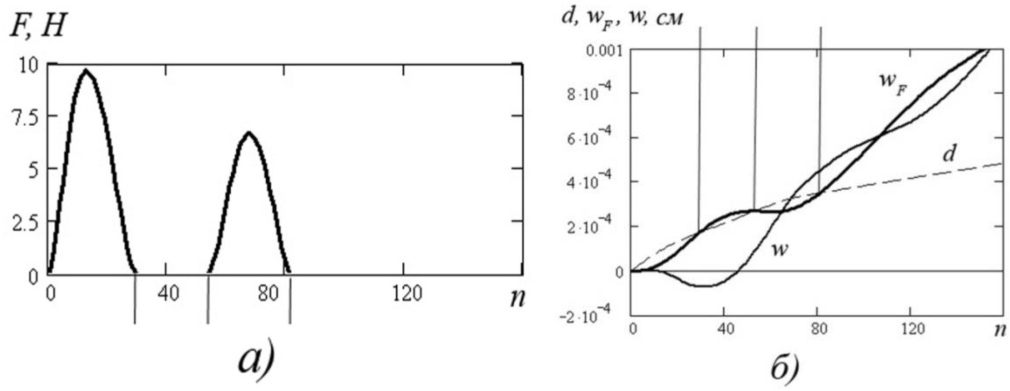

Рис. 3. Результати розрахунків

На рис. 3, *а* представлена сила контактної взаємодії між тілом і стержнем $F(t)$.

На рис. 3, *б* – переміщення тіла d ; переміщення перерізу стержня, в якому відбувається удар, w_F ; переміщення кінців стержня w .

Висновки і пропозиції. Наведено розрахунки поперечного удару тілом по вільному стержню (вільній балці). Це може бути цікавим з наукового погляду і корисним в інженерній практиці.

Проілюстровано два варіанти моделювання руху вільного стержня.

Перший варіант: конструкція моделюється за допомогою методу скінченних елементів. При цьому для перетворення кінематично змінюваної системи у кінематично незмінювану вводяться фіктивні елементи дуже малої жорсткості. Цей варіант дещо трудомісткий, але може бути застосований для досить складних вільних систем.

Другий варіант: окремо розглядаються переміщення стержня без урахування деформацій і з урахуванням деформацій. Останні моделюються за допомогою розкладання переміщень у тригонометричні ряди. Цей варіант зручний під час застосування сучасних математичних пакетів (програм).

Список використаних джерел

1. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
2. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит ; пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лужина. – М.: Стройиздат, 1965. – 447 с.
3. *Кильчевский Н.А.* Теория соударения твёрдых тел / Н. А. Кильчевский. – К. : Наукова думка, 1969. – 247 с.
4. *Расчёты* на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарёв, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др. – М. : Машиностроение, 1958. – 884 с.
5. *Ольшанский В. П.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Х. : Міськдрук, 2012. – 320 с.
6. *Голоскоков Е. Г.* Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – К. Наукова думка, 1977. – 339 с.
7. *Грицюк В. Ю.* Розрахунок удару тілом по консольній балці / В. Ю. Грицюк // Технологічні науки та технології: науковий журнал. – 2015. – № 1(1). – С. 9–14.
8. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов : пер. с англ. / К. Бате, Е. Вилсон. – М. : Стройиздат, 1982. – 448 с.
9. *Прочность,* устойчивость, колебания : справочник в 3 томах. Т. 3 / под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 567 с.

References

1. Tymoshenko, S.P. (1967). *Kolebaniia v inzhenernom dele [Fluctuations in engineering]*. Moscow: Nauka, 444 p. (in Russian).
2. Goldsmit, V. (1965). *Udar. Teoriia i fizicheskie svoistva soudariaemykh tel [Impact. Theory and physical properties of colliding bodies]*. (Luzhina, M. S., Luzhin, O. V., Trans.). Moscow: Stroiizdat, 447 p. (in Russian).
3. Kilchevskii, N.A. (1969). *Teoriia soudareniya tverdykh tel [The theory of the impact of solid bodies]*. Kiev: Naukova dumka, 247 p. (in Russian).
4. Ponomarev, S.D., Biderman, V.L., Likharev, K.K. et al. (1958). *Raschety na prochnost v mashinostroenii [Strength calculation in machine building]*. Moscow: Mashinostroenie, 884 p. (in Russian).
5. Olshanskii, V.P., Tishchenko, L.N., Olshanskii, S.V. (2012). *Kolebaniia sterzhnei i plastin pri mekhanicheskom udare* [Vibrations of rods and plates under mechanical impact]. Kharkiv: Miskdruk, 320 p. (in Russian).
6. Goloskokov, E.G., Filippov, A.P. (1977). *Nestatsionarnye kolebaniia deformiruemykh sistem [Nonstationary vibrations of deformable systems]*. Kiev: Naukova dumka, 339 p. (in Russian).
7. Hrytsiuk, V.Yu. (2015). Rozrakhunok udaru tilom po konsolnii baltsi [Calculation of a body impact on a cantilever beam]. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii: naukovyi zhurnal – Technical sciences and technology: Scientific journal*, no. 1(1), pp. 9–14 (in Ukrainain).
8. Bate, K. (1982). *Chislennye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical Method and the Finite Element Analysis*] (Bate, K., Vilson, E., trans.). Moscow: Stroiizdat, p. 448 (in Russian).
9. Birgera, I.A., Panovko, Ia.G. (eds.) (1968). *Prochnost, ustoichivost, kolebaniia [Strength, Stability, fluctuations]*. (Vols. 1-3). Moscow: Mashinostroenie, vol. 3, 567 p. (in Russian).

Грицюк Віталій Юхимович – кандидат технічних наук, доцент, Чернігівський національний технологічний університет (вул. Шевченка, 95, м. Чернігів, 14027, Україна).

Грицюк Виталий Ефимович – кандидат технических наук, доцент, Черниговский национальный технологический университет (ул. Шевченко, 95, г. Чернигов, 14027, Украина).

HrytsiukVitalii– PhDinTechnicalSciences, AssociateProfessor, ChernihivNationalUniversityofTechnology (95 Shevchenka Str., 14027 Chernihiv, Ukraine).

E-mail: hryvit@gmail.com