DOI: 10.25140/2411-5363-2024-2(36)-319-330
УДК 528.22:551.24

Олександр Антонович Тадєєв

кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії та картографії
Національний університет водного господарства та природокористування (Рівне, Україна)
E-mail: o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4566-0160. **ResearcherID:** B-6081-2019

МОДЕЛЮВАННЯ ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ РЕГІОНАЛЬНОГО МАСШТАБУ З ВИКОРИСТАННЯМ GNSS-ДАНИХ (НА ПРИКЛАДІ ТЕРИТОРІЇ ЄВРОПИ)

У статті представлено результати науково-методичного дослідження проблеми оцінювання горизонтальних деформацій земної поверхні за даними глобальних навігаційних супутникових систем GNSS. Подано результати статичного моделювання горизонтальних деформацій земної поверхні регіонального масштабу методами, які ґрунтуються на теорії перетворень образів ріманового простору у формі диффеоморфних многовидів. В основу методів покладено властивості елементарних многовидів евклідового типу розмірності N = 2 у формі дотичної площини з параметризацією прямокутною системою координат та дотичних криволінійних поверхонь обертання з параметризацією сферичною та еліпсоїдальною системами. Розв'язки завдань на цих поверхнях досягнуто методами проективно-диференціальної геометрії. Моделювання реалізовано за вибіркою координат GNSS-станцій на території Європи протягом 2008-2014 рр. Вибірку сформовано на основі бази даних JPL Comb архіву SOPAC. Для побудови функціональних моделей деформації використано базисні функції у формі рядів поліномів Лежандра різних степені та порядку на площині та рядів сферичних функцій різних степені та порядку на геосфері та земному еліпсоїді обертання. Наведено результати обчислення характеристик горизонтальних деформацій земної поверхні, редукованої на зазначені модельні поверхні, та їх порівняльний аналіз. Одержаними результатами підтверджено деформації нелінійного характеру. Наведено результати оцінювання кутових спотворень криволінійних систем координат. Порівняння одержаних результатів з їх аналогами у трансформаціях референцних систем ITRF-ETRF протягом 2008-2014 рр. показало розбіжності у межах точності їх обчислення.

***Ключові слова**: GNSS; модельна поверхня; базисна функція; апроксимація; метричний тензор; деформація.*
Табл.: 3. Рис.: 4. Бібл.: 15.

Актуальність теми дослідження. Оцінювання і аналіз деформації Землі – одне з пріоритетних завдань сучасної геодинаміки. Опираючись на резолюції Міжнародної асоціації геодезії [1], одним із найбільш актуальних напрямів досліджень проблеми з використанням геодезичних даних є розробка інноваційних методів опрацювання часових рядів спостережень у геодезичних мережах з метою статичного та динамічного моделювання і аналізу полів деформації усіх масштабів. Вхідними даними для вирішення таких завдань рекомендується використовувати результати моніторингу координат методом GNSS (Global Navigation Satellite System).

Постановка проблеми. Теоретичною основою вирішення проблеми оцінювання деформації Землі є математична теорія пружності. З об'єктивних причин ця потужна математична основа знайшла застосування у найпростішій формі лінійно-однорідної моделі нескінченно малої деформації суцільного середовища. Це було зумовлено відсутністю альтернативи у виборі вхідних даних, якими ще від початку минулого століття використовувались результати повторних вимірів прямокутних координат пунктів у планових мережах, здебільшого в тріангуляції. Останніми десятиліттями у практику геодезичних робіт запроваджуються супутникові навігаційні технології, які реалізовуються у мережах перманентних станцій GNSS. На сьогодні густота покриття територій такими мережами й точність визначення координат станцій достатні для вирішення завдань геодинаміки. З цього погляду GNSS-технології несуть у собі неоціненний потенційний інформаційний ресурс і розкривають нові перспективи вирішення поставленої проблеми. Однак повноцінне їх застосування потребує переосмислення використовуваної теоретичної основи оцінювання деформації Землі.

Аналіз досліджень проблеми. Ґрунтуючись на лінійно-однорідній моделі нескінченно малої деформації суцільного середовища, на початку минулого століття у практику досліджень проблеми було запроваджено метод скінченних елементів, який реалізовувався

© О. А. Тадєєв, 2024

на симплексах (трикутниках). Відтоді метод набув масового застосування і зазнав численних видозмін. Аналіз видозмін методу та прикладних аспектів його застосування детально розкрито у статті [2]. Разом із симплексами стали використовуватись скінченні елементи складніших геометричних форм. У 1982 році завдяки поєднанню диференціальної геометрії та лінійної теорії деформації на основі афінних перетворень прямокутних координат геодезичних пунктів вперше використано апарат деформаційного аналізу [3]. Це розкрило перспективу неперервного оцінювання горизонтальних деформацій безвідносно до тих чи інших форм скінченних елементів. Згодом також з'явились вдосконалення у напрямі використання вхідних даних у двовимірних криволінійних системах координат.

Запровадження в дослідницьку практику симплексної моделі скінченних елементів було вимушеним, але свого часу хоча б формально виправданим підходом до оцінювання деформацій за результатами вимірів у тріангуляції. Проте цю модель беруть за основу досліджень також і з використанням результатів моніторингу координат у мережах GNSS-станцій, а розділення території на скінченні елементи здійснюють примусово. Наприклад, як це реалізовано у дослідженнях [4], де симплекси утворюють методом тріангуляції Делоне. Таке формальне розділення поверхні на симплекси забезпечує хіба що умову побудови, наскільки це можливо, рівносторонніх трикутників і оцінювання у їх межах ймовірних локальних лінійних деформацій.

За будь-якого підходу до утворення скінченних елементів завжди будуть мати місце ризики суб'єктивного оцінювання деформації, якщо не виконувати перевірку на предмет її відповідності умовам лінійно-однорідної моделі. Такого недоліку в реалізації методу скінченних елементів на GNSS-даних можна позбутись, наприклад, як це здійснили автори досліджень [5]: досліджувану територію було розділено на однорідні області за наявною геолого-геофізичною інформацією, а характеристики деформації обчислено за результатами апроксимації лінійної функції на сукупності усіх GNSS-станцій у межах виділених областей. Таке інноваційне рішення цілком задовольняє умови деформаційного аналізу, як їх сформульовано у [3].

Практика використання деформаційного аналізу та вхідних даних, одержаних методом GNSS, розкрила нові можливості вдосконалення функціональних моделей деформації у напрямку використання нелінійних базисних функцій. Проте за умови незмінних теоретичної основи й використовуваної моделі будь-які подібного роду вдосконалення позбавлені перспектив. Адже у процесі формування тензора деформації беруться до уваги лише центроафінні перетворення координат вершин скінченних елементів. Це зумовлює лінеаризацію використовуваних базисних функцій, тому у підсумку тензор спроможний передати лише лінійні закономірності деформації.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Аналіз досліджень проблеми показав необхідність пошуку математичної моделі на альтернативній чи узагальнювальній теоретичній основі, яка не була б обтяжена констатованими обмежувальними умовами з точки зору спроможності оцінювання виключно лінійних деформацій. У статті [6] розкрито перспективи створення таких моделей і розроблення адаптивних методів оцінювання деформацій на основі теорії перетворень образів ріманового простору у формі диффеоморфних многовидів [7]. У частині оцінювання горизонтальної складової деформації рекомендовано використовувати елементарні многовиди евклідового типу розмірності $N = 2$ у формі дотичної площини з параметризацією прямокутною системою координат або дотичних криволінійних поверхонь обертання з параметризацією сферичною або еліпсоїдальною системами. На такій основі розроблено відповідні методи оцінювання деформацій [8; 9; 10].

Мета дослідження – апробація розроблених методів оцінювання горизонтальних деформацій земної поверхні на результатах моніторингу координат методом GNSS. У цій частині досліджень розкриємо перспективи моделювання деформації регіонального масштабу на прикладі території Європи.

Виклад основного матеріалу. Вирішення проблеми на основі теорії перетворень образів ріманового простору досягається під умовою, що перетворення простору мають геофізичне походження. Тоді перетворення замкнених неперервних областей простору ідентифікуються як деформації. Використана теоретична основа не накладає жодних обмежень на розміри та геометричні форми областей і не вимагає їх розділення на скінченні елементи. Отже, областю простору можна вважати топографічну поверхню, окреслену розташованими на ній станціями GNSS, безвідносно до її масштабу.

Загальна теорія накладає на перетворення многовидів умови гомеоморфізму – вони повинні бути однозначними, неперервними й диференційованими. У розрізі розмірності многовидів $N = 2$ зазначені умови визначають клас базисних функцій, які передають перетворення, – це гладкі або кусково-гладкі функції класу C^{N-1}. Отже, на функціональну модель перетворення простору накладаються лише умови гомеоморфізму, не обмежуючи її базисні функції лінійною аналітичною формою [7]. Таким чином, для побудови функціональної моделі доцільно використати, наприклад, властивості поліномів Лежандра. Вони спроможні забезпечити умови гомеоморфних функцій гармонічного типу з метою описування перетворень на основі загальної теорії поверхонь [7]. Ці умови допускають використання будь-яких функцій $f(x)$, які періодичні на осі $-\infty < x < +\infty$, або функцій з періодом 2π, якщо виконати відповідну лінійну заміну змінної x. Загалом, поліноми Лежандра – це різновид періодичних ортогональних функцій, які визначаються формулою Родріга на відрізку $[-1;+1]$. Діапазон значень змінної x шляхом лінійного перетворення $z = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ може бути приведений до будь-якого відрізка $[a;b]$. При цьому властивість ортогональності функції не втрачається. При апроксимації двовимірних полів змінних на площині використовують систему поліномів Лежандра $f(x,y)$, яка реалізовується розкладами їх у ряди заданої степені та порядку m. У цьому випадку також допускається приведення змінних системи до тих чи інших визначених діапазонів. Заміни змінних зберігають ортогональність ряду для головних функцій на відрізку $[x_{\min}; x_{\max}]$ і приєднаних функцій на відрізку $[y_{\min}; y_{\max}]$. Ця властивість дозволяє використовувати системи поліномів Лежандра для локальних областей поверхонь безвідносно до їх кривини й параметризації. Наприклад, для узагальнення емпіричних дискретних значень координат точок на сфері можна використати ряди сферичних функцій $f(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(A_{nk}P_{nk}(\theta)\cos k\lambda + B_{nk}P_{nk}(\theta)\sin k\lambda)$ степені та порядку m. Зміна значення m визначає кількість невідомих коефіцієнтів A_{nk} та B_{nk} і дорівнює $(m+1)^2$ [11]. На будь-якій поверхні вирішення проблеми можна досягнути апроксимацією явного вираження розкладу в ряд заданої степені та порядку з використанням методу найменших квадратів. За результатами апроксимації на сукупності усіх GNSS-станцій, які розташовані у межах замкнених областей поверхонь, обчислюються невідомі коефіцієнти A_{nk}, B_{nk} і будуються відповідні емпіричні формули. Вони й формують функціональну модель перетворення (деформації) заданих областей поверхонь.

Беручи до уваги дискретність геодезичних даних, неоднозначність вибору степені та порядку ряду й емпіричне походження одержаних таким чином результатів, постає проблема відсутності однозначного кінцевого розв'язку, що зумовлює порушення відповідної умови гомеоморфізму. Вирішення цієї проблеми можна вмотивувати формально за критерієм точності апроксимації, що спроможний забезпечити метод найменших квадратів за

посередництва середньої квадратичної похибки апроксимації. Це дасть змогу оцінити ступінь наближення одержаного результату розв'язку до строгого на умовах гомеоморфізму. Компромісне рішення щодо вибору кінцевих емпіричних формул, які відповідають базисним функціям моделі, потрібно ухвалювати з урахуванням таких вимог.

1. Оптимальність вибору формули повинне визначати значення середньої квадратичної похибки апроксимації, яке відповідає точності емпіричних даних.

2. Похибки апроксимації функцій на складових зміщень станцій повинні, по можливості, бути рівними. Така вимога обґрунтовується правилом розподілу впливу похибок аргументів (складових зміщень) на точність їх функції.

3. Надмірне понад точність вимірів підвищення точності апроксимації функції недоцільне: гранично, за нульової похибки апроксимації, задача перетворюється в інтерполяцію функції у вузлах (станціях спостережень), а емпірична формула втрачає здатність передавати закономірності просторового розподілу зміщень станцій.

4. Надмірне збільшення кількості членів розкладу функції у ряди недоцільне з причини відповідного зменшення числа ступенів свободи при апроксимації функції. Враховуючи, що здебільшого кількість n станцій спостережень обмежена, порушення цієї вимоги спричинятиме зменшення кількості $r = n - (m+1)^2$ надлишкових виміряних величин і відповідне збільшення похибки апроксимації функції. Вплив цієї обставини ставить ефективність кінцевого розв'язку в пряму залежність від кількості станцій спостережень, які підлягають опрацюванню.

Побудована на таких засадах функціональна модель спроможна гарантувати передачу нелінійних деформацій та їх врахування головним геометричним об'єктом – двовалентним коваріантним метричним тензором, формування якого не обтяжене умовою лінеаризації базисних функцій [7]. Тензор за посередництва власних інваріантів передає зміну метричних властивостей області простору (топографічної поверхні) за допомогою числових характеристик різного геометричного змісту. За своєю суттю вони і є параметрами деформації топографічної поверхні як об'єкта досліджень у загальноприйнятому тлумаченні деформаційного аналізу [3].

Окреслена теоретична основа має узагальнювальний характер щодо використовуваної у задачах деформаційного аналізу навіть з погляду теорії тензорного аналізу та її застосування у геометрії, механіці та фізиці: «лінійно-однорідна нескінченно мала деформація суцільного середовища – це перетворення в середовищі афінного простору, який є тривіальним щодо рімановго і навіть евклідового» [7].

Використовуючи методи проєктивно-диференціальної геометрії і прийоми описування змін рімановї метрики у дотичному просторі, здійснено розв'язки в типових геодезичних двовимірних системах координат і одержано робочі формули для обчислення характеристик деформації. Одержані результати генерують відповідні методи, як їх розкрито у працях [8; 9; 10].

Для тестування розроблених методів вибірку вхідних даних сформовано координатами 126 GNSS-станцій на території Європи. Координати відібрано з бази JPL Comb архіву SOPAC (Scripps Orbit and Permanent Array Center) [12] станом на середину 2008 та 2014 років у датумі ITRF2008. Розташування станцій та вектори їх горизонтальних зміщень ілюструє схема на рис. 1. Відібрані станції окреслюють поле деформації земної поверхні регіонального масштабу.

За сформованою вибіркою вхідних даних обчислено характеристики деформації земної поверхні, редукованої на площину з параметризацією локальною топоцентричною системою прямокутних координат x, y, геосферу з параметризацією геоцентричною системою сферичних широт φ (або полярної віддалі $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$) та довготи λ і на земний

еліпсоїд з параметризацією системою геодезичних широти B та довготи L. Координати станцій у зазначених системах параметризації одержано перетвореннями з геоцентричної системи X, Y, Z, як їх задано у базі JPL Comb [12].

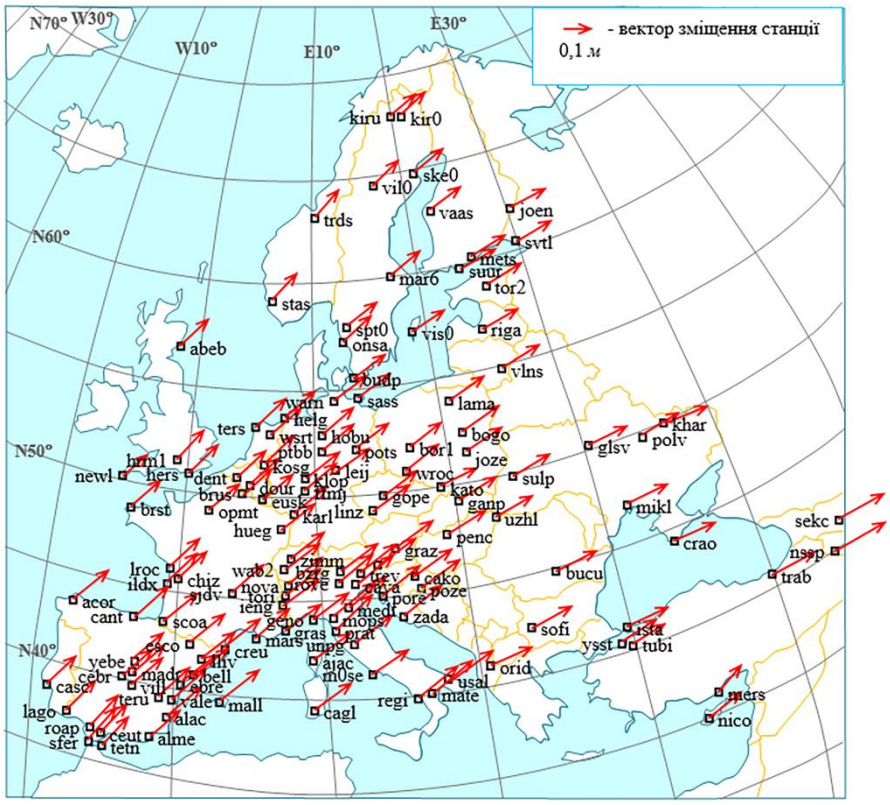

Рис. 1. Розташування і вектори зміщень GNSS-станцій протягом 2008-2014 рр.
Джерело: розроблено автором.

Обчисленню підлягали характеристики деформації наступних трьох груп, як їх розкрито у працях [8; 9; 10]: 1) дилатація (масштаб площі) p; 2) головні лінійні деформації, зокрема екстремальні розширення $\mu_{\max}$ (розтяг) і $\mu_{\min}$ (стиснення), зсув γ_m, а також напрям головної осі деформації α, який орієнтує дію $\mu_{\max}$. Цей напрям задає дирекційний кут на площині або азимут на геосфері та еліпсоїді; 3) жорстке обертання окресленої частини земної поверхні як абсолютно твердого тіла, яке характеризує кут ε.

Результати моделювання деформації земної поверхні, редукованої на площину, представлено в табл. 1. Емпіричні формули функціональної моделі сформовано за результатами апроксимації явного вираження розкладу $f(x, y)$ ряду поліномів Лежандра різних значень степені та порядку m методом найменших квадратів на складових $\Delta x, \Delta y$ зміщень станцій. Одержані емпіричні формули дали змогу сформувати відповідні значенням m функціональні моделі, метричний тензор і на їх основі обчислити характеристики деформації за формулами, як їх розкрито в [9]. При значенні $m = 1$ враховуються лише лінійні члени розкладу $f(x, y)$. Керуючись вимогами 1-4 щодо встановлення емпіричних формул функціональної моделі і беручи до уваги, найбільшою мірою, пункт 2 цих вимог, прийнято таке рішення: кінцевими формулами, які генерують функціональну модель для даної емпіричної вибірки, потрібно прийняти ті, що відповідають рядам поліномів Лежандра степені та порядку $m = 4$. Відповідні цим базисним функціям характеристики найкраще представляють деформацію земної поверхні в проєкції на площину.

Таблиця 1 – Результати обчислення характеристик деформації земної поверхні, редукованої на площину

Базисні функції: ряди поліномів Лежандра степені та порядку *m*	Похибки апроксимації σ_x, σ_y (*мм*)	Характеристики деформації та їх середні квадратичні похибки					
		p 1.e-9	μ_{max} 1.e-9	μ_{min} 1.e-9	γ_m 1.e-9	α°	ε'' 1.e-4
m = 1	± 8 ± 14	17 ± 2	30 ± 2	-13 ± 1	43 ± 2	206.8 ± 1.3	71 ± 5
m = 2	± 7 ± 10	13 ± 3	33 ± 3	-20 ± 2	52 ± 4	209.2 ± 1.8	92 ± 8
m = 3	± 7 ± 9	5 ± 5	20 ± 4	-25 ± 3	46 ± 5	209.1 ± 2.8	80 ± 11
m = 4	± 6 ± 6	9 ± 6	22 ± 4	-13 ± 4	36 ± 6	193.2 ± 5.1	33 ± 13
m = 5	± 6 ± 5	-14 ± 28	39 ± 18	-53 ± 24	91 ± 30	145.0 ± 9.1	177 ± 67

Джерело: розроблено автором/

Наступний крок опрацювання даних – моделювання деформації земної поверхні у проєкції на геосферу. Для узагальнення емпіричних дискретних значень координат GNSS-станцій на геосфері використано базисні функції у формі рядів сферичних функцій. Емпіричні формули побудовано за явним вираженням розкладу $f(\theta,\lambda)$ ряду сферичних функцій різних значень степені та порядку m методом найменших квадратів на складових зміщень $\Delta\varphi,\Delta\lambda$. Вони дали змогу сформувати відповідні значенням m функціональні моделі й за посередництва метричного тензора обчислити характеристики деформації за формулами, як їх розкрито в [10]. Результати зведено до табл. 2. При значенні $m=1$ враховуються лише лінійні члени розкладу $f(\theta,\lambda)$.

Таблиця 2 – Результати обчислення характеристик деформації земної поверхні, редукованої на геосферу

Базисні функції: ряди сферичних функцій степені та порядку *m*	Похибки апроксимації σ''_φ, σ''_λ 1,e-4	Характеристики деформації та їх середні квадратичні похибки					
		p 1.e-9	μ_{max} 1.e-9	μ_{min} 1.e-9	γ_m 1.e-9	α°	ε'' 1.e-4
m = 1	± 3,0 ± 4,9	-1 ± 1	11 ± 1	-12 ± 1	22 ± 1	327,4 ± 1,7	42 ± 3
m = 2	± 2,5 ± 3,0	3 ± 2	9 ± 1	-6 ± 1	15 ± 2	331,9 ± 3,6	26 ± 4
m = 3	± 2,5 ± 2,5	11 ± 3	13 ± 2	-2 ± 2	15 ± 3	330,5 ± 5,7	27 ± 6
m = 4	± 8,6 ± 10,2	36 ± 23	40 ± 19	-5 ± 19	45 ± 29	333,0 ± 17,8	42 ± 22
m = 5	± 18,5 ± 22,9	59 ± 44	65 ± 32	-6 ± 32	71 ± 43	330,8 ± 27,7	125 ± 54

Джерело: розроблено автором.

Графік на рис. 2 ілюструє закономірності зміни похибок апроксимації σ''_φ, σ''_λ від степені та порядку рядів m. Найкраща точність апроксимації досягнута при значенні *m* = 3. Цей результат узгоджується з пунктом 2 вимог 1-4 щодо встановлення оптималь-

них емпіричних формул функціональної моделі. Графіки на рис. 3, які показують закономірності зміни значень обчислених характеристик деформації, підтверджують, що найбільш реалістичними є результати моделювання з використанням рядів сферичних функцій степені й порядку $m = 3$. Отже, цим посвідчено наявність нелінійних деформацій земної поверхні території Європи.

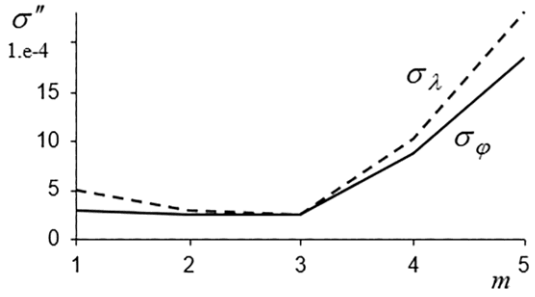

Рис. 2. Закономірності зміни похибок апроксимації від степені рядів m на геосфері
Джерело: розроблено автором.

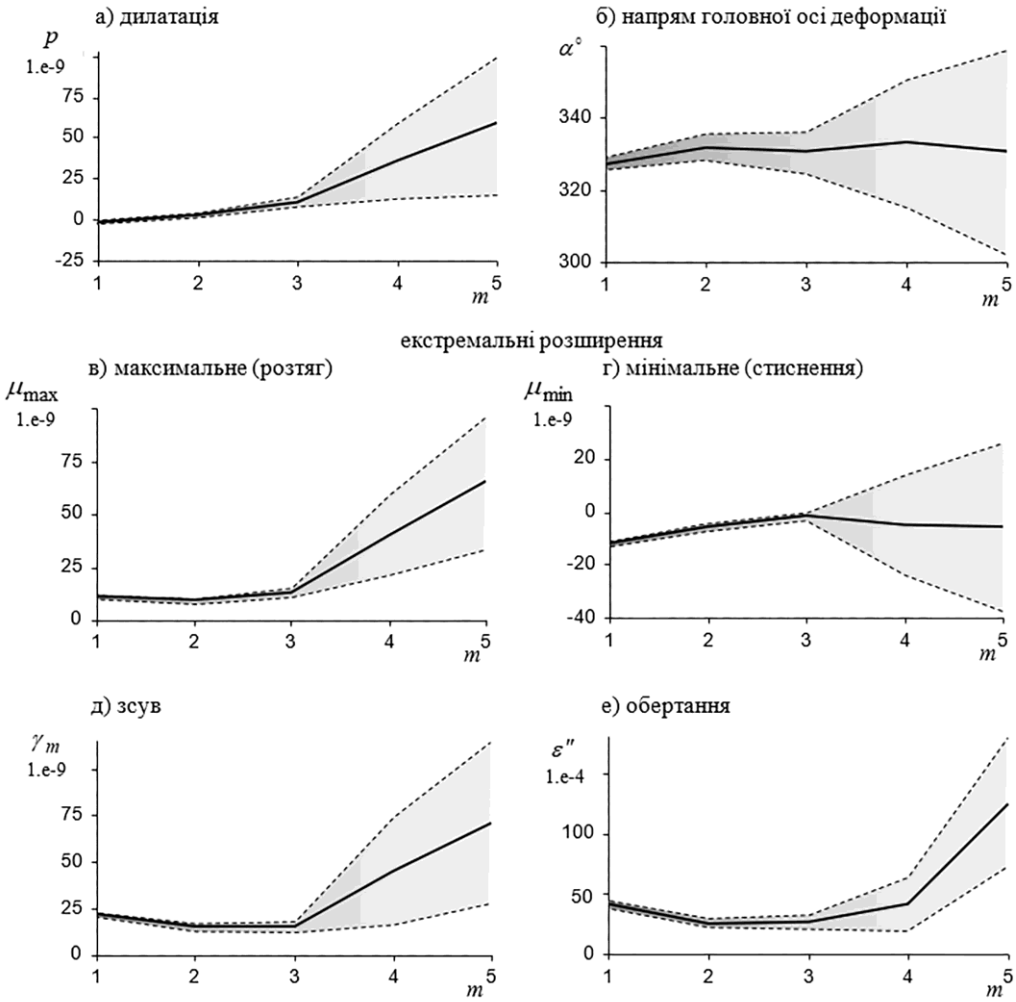

Рис. 3. Закономірності зміни значень характеристик деформації від степені рядів m на геосфері з урахуванням точності їх обчислення (забарвлене поле в межах пунктирних ліній виражає діапазон ймовірних значень параметрів)
Джерело: розроблено автором.

Опрацювання вхідних даних у проєкції земної поверхні на еліпсоїд з використанням робочих формул, як їх розкрито у [8], дало кінцеві результати, які відрізняються від таких же на геосфері практично у межах їх середніх квадратичних похибок. Тому ці результати тут не представлено.

Порівняльний аналіз кінцевих результатів моделювання на площині та геосфері показує наступне. Найбільші розбіжності між однойменними характеристиками мають місце для групи головних лінійних деформацій. Цей факт не знаходить іншого пояснення, крім як закономірний наслідок значних спотворень проєкції земної поверхні на площину в порівнянні з геосферою чи еліпсоїдом. Проте такі спотворення ніяк не вплинули на дилатацію p. Це зумовлено внутрішнім змістом параметра p: як масштаб площі, він підлягав обчисленню не як абсолютний, а як відносний показник. Розбіжності в значеннях характеристики обертання ε не перевищують точності їх обчислення. Такий результат можна пояснити, виходячи зі змісту цієї характеристики: крім жорсткого обертання частини поверхні, яку окреслює задана сукупність GNSS-станцій, навколо центру їх ваги, кут ε ототожнюється зі спотворенням ортогональності осей системи координат, як це інтерпретується з погляду теорії тензорного аналізу [7]. Спотворення ортогональності осей координат рівною мірою проявляє себе на усіх трьох модельних поверхнях. У підсумку, беручи до уваги одержані результати й факт більшої адекватності земній поверхні моделі геосфери в порівнянні з площиною, потрібно констатувати таке: кінцевими показниками деформації земної поверхні території Європи є такі, що одержані на основі моделі з базисними сферичними функціями степені і порядку $m = 3$.

У зв’язку з ремаркою щодо параметра ε розкриємо ще один прикладний аспект результатів моделювання. Він пов'язаний із проблемою оцінювання спотворень системи координат. Безвідносно до типу поверхні, використовувані на ній координати станцій є прямим наслідком перетворення із тривимірної геоцентричної системи координат X, Y, Z у рамках референцної системи ITRS. Факт порушення геометричних та фізичних умов, які закладено у концепцію створення системи ITRS відносно її стану в тій чи іншій реалізації ITRF, є загальновідомим. Тож якщо мають місце спотворення в системі ITRS, то неминучим буде відповідний ефект в системі координат використовуваної модельної поверхні. Дані табл. 3 та їх наочна ілюстрація схемою на рис. 4 показують результати оцінювання кутових спотворень сферичної системи координат φ, λ протягом 2008-2014 рр. за формулами, як їх подано в [10]. Оцінюванню підлягали: 1) азимути A_ϕ^{def}, A_λ^{def} осей координат деформованої системи $\phi^{def}, \lambda^{def}$ відносно їх ортогонального початкового стану при $A_\phi = 0^\circ$, $A_\lambda = 90^\circ$; 2) відхилення осей від початкового стану $A_\phi^{def} - A_\phi$, $A_\lambda^{def} - A_\lambda$; 3) міра косокутної системи $\vartheta = A_\lambda^{def} - A_\phi^{def}$ після втрати властивості ортогональності внаслідок деформації поверхні; 4) показник спотворення ортогональності $\varepsilon = \vartheta - 90^\circ$ відносно початкового стану. Кут ε ототожнюється з характеристикою жорсткого обертання земної поверхні як абсолютно твердого тіла у проєкції на геосферу.

З погляду теорії параметризації криволінійних поверхонь обертання, їх систему координатних ліній утворюють меридіани й паралелі. Мережі меридіанів і паралелей в сферичній та еліпсоїдальній параметризації збігаються із загальною ізометричною системою і тому ідентичні між собою. Тому формули для вираження показників кутових спотворень на геосфері та еліпсоїді тотожні [8] і одержані результати рівною мірою належать до еліпсоїдальної системи координат.

Таблиця 3 – Оцінки кутових спотворень сферичної системи координат

Осі координат	меридіан φ	паралель λ
$A_\phi^{def}, A_\lambda^{def}$	359° 59′ 59.9985″	90° 00′ 00.0012″
$A_\phi^{def} - A_\phi, A_\lambda^{def} - A_\lambda$	-0.0015″	0.0012″
ϑ	90° 00′ 00.0027″	
ε	0.0027″±0.0006″	

Джерело: розроблено автором.

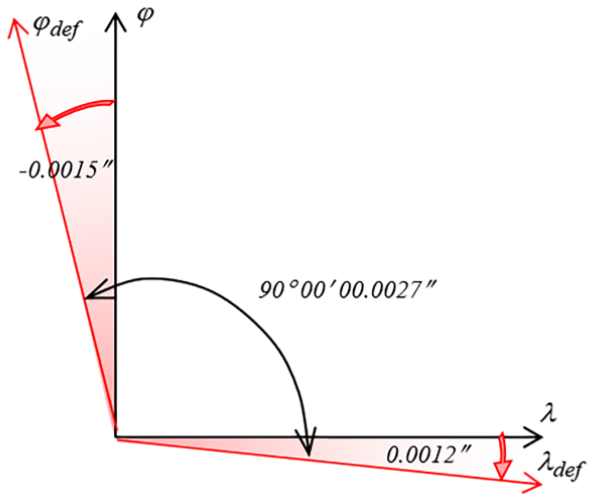

Рис. 4. Схема кутових спотворень сферичної системи координат
Джерело: розроблено автором.

Наведені в табл. 3 емпіричні оцінки кутів $A_\phi^{def} - A_\phi, A_\lambda^{def} - A_\lambda$ порівнювались з аналогічними їм за змістом параметрами зміни орієнтування осей координат R_x, R_y, R_z, якими оперують у розв'язках реалізацій ETRF Європейської земної референцної системи ETRS89 відносно відповідних реалізацій ITRF системи ITRS. Звісно, таке порівняння не зовсім коректне з огляду на різні розмірності систем координат. Проте зіставлення одержаних емпіричних оцінок з їх аналогами у трансформаціях ITRF-ETRF, де показники R_x, R_y, R_z у часовому проміжку 2008-2014 рр. становлять відповідно 1.785, 11.151 та -16.170 *mas* [13], показало, що порівнювані параметри є одного порядку й відрізняються практично у межах точності їх обчислення.

Одержаний результат якоюсь мірою очікуваний з огляду на взаємозв'язки між двома референцними системами, як їх розкрито, наприклад, в працях [13; 14]. Передусім потрібно взяти до уваги мету створення ETRS89 – це фіксація відлікової системи до стабільної частини Євразійської літосферної плити задля уникнення еволюції координат з часом внаслідок незалежних рухів плит у Міжнародній системі ITRS. Параметри обох систем збігаються лише на епоху 1989.0, коли започатковувалось створення Європейської системи. Відтоді внаслідок сталого дрейфу континенту система ETRS89 прямо пов'язана із системою ITRS строгими математичними співвідношеннями, але за винятком параметрів обертання R_X, R_Y, R_Z, які в сукупності виражають обертання Євразійської плити в реалізаціях ITRF і визначаються незалежно за даними супутникового моніторингу поверхні на європейських станціях. Саме ця обставина пояснює збіжність кутів $A_\phi^{def} - A_\phi, A_\lambda^{def} - A_\lambda$ з їх аналогами R_X, R_Y, R_Z, якщо взяти до уваги, що вибірка емпіричних вхідних даних формувалась у реалізації ITRF2008.

Висновки.

1. Використані методи показали результати, якими підтверджено деформації земної поверхні території Європи нелінійного характеру. Загалом, ефективність використання нелінійних моделей в сучасних дослідженнях деформації Землі стає безсумнівною. Це підтверджено навіть на прикладі досягнення розв'язку ITRF2014 системи ITRS: «генералізація розв'язку ITRF2014 з розширеним моделюванням нелінійних рухів станцій забезпечила значне підвищення його точності порівняно з ITRF2008» [15].

2. Результати моделювання деформацій у відношенні до геосфери та земного еліпсоїда обертання виявились практично ідентичними. Вони більш реалістично відображають деформації земної поверхні в порівнянні з такими ж у відношення до площини. Моделювання полів горизонтальних деформацій земної поверхні регіональних масштабів рекомендується реалізовувати у проєкції на одну із зазначених криволінійних модельних поверхонь.

3. Порівняння результатів оцінювання кутових спотворень двовимірних криволінійних систем координат з їх аналогами у трансформаціях референцних систем ITRF-ETRF показало розбіжності у межах точності їх обчислення. Цим посвідчено достовірність кінцевих результатів моделювання деформацій земної поверхні території Європи.

4. Крім прямого призначення для вирішення завдань деформаційного аналізу в геодинаміці, розроблені методи можуть бути використані як додатковий інструмент моніторингу референцних систем на регіональному та локальному рівнях, принаймні з погляду виявлення ефектів геодинамічного походження.

Список використаних джерел

1. International Association of Geodesy. Commission 3 - Earth Rotation and Geodynamics [Electronic resource]. – Access mode: http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf.

2. Dermanis, A. The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation / A. Dermanis // eds. D. Arabelos, M. Kontadakis, Ch. Kaltsikis, S. Spatalas. Terrestrial and stellar environment. – Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 2009. – Pp. 107-144.

3. Schneider, D. Complex Crustal Strain Approximation [Electronic resource] / D. Schneider. – Institut für Geodäsie und Photogrametrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, 1982. – Access mode: http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:1494-01.pdf.

4. Grafarend, E.W. Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets) / E.W. Grafarend, B. Voosoghi // Journal of Geodesy. – 2003. – № 77(5-6). – P. 303-326. DOI: 10.1007/s00190-003-0329-2.

5. Pietrantonio, G. Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications / G. Pietrantonio, F. Riguzzi // Journal of Geodynamics. – 2004. – № 38. – P. 1-18. DOI: doi.org/10.1016/j.jog.2004.02.021.

6. Тадєєв, О. Адаптивні методи оцінювання та інтерпретації деформаційних полів Землі з використанням GNSS-даних / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2018. – № I(35). – С. 71-78.

7. Sokolnikoff, I. S. Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua / I. S. Sokolnikoff. – New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1964. – 361 p.

8. Тадєєв, О. Оцінювання деформацій земної поверхні за даними в геодезичних криволінійних системах координат / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2015. – № I(29). – С. 48-52.

9. Тадєєв, О. Оцінювання деформацій земної поверхні з позицій теорії квазіконформних відображень / О. Тадєєв // Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2013. – № 78. – С. 140-145.

10. Тадєєв, О. Оцінювання деформацій земної поверхні, редукованої на геосферу / О. Тадєєв // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. – 2013. – № II(26). – С. 46-52.

11. Янке, Е. Специальные функции : формулы, графики, таблицы : [справочник] / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш ; пер. с 6-го перераб. нем. изд. под ред. Л. И. Седова. – Изд. 2-е, стер. – Москва : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 344 с.

12. Scripps Orbit and Permanent Array Center [Electronic resource]. – Access mode: http://sopac.ucsd.edu/sector.shtml; http://csrc-old.ucsd.edu/velocities.shtml.

13. Relationship and Transformation between the International and the European Terrestrial Reference System. EUREF Technical Note 1 [Electronic resource] / eds. Z. Altamini. – Institut National de l'Information Géographique et Forestière (IGN), France, 2018. – Access mode: http://etrs89.ensg.ign.fr/pub/EUREF-TN-1.pdf.

14. Memo: Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign [Electronic resource] / eds. C. Boucher, Z. Altamini. – Institut National de l'Information Géographique et Forestière (IGN), France, 2011. – Access mode: http://etrs89.ensg.ign.fr/memo-V8.pdf.

15. Altamini, Z. ITRF2014: a new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions / Z. Altamini, P. Rebischung, L. Metivier, X. Collilieux // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2016. – № 121 (B8). – P. 6109-6131. DOI: 10.1002/2016JB013098.

References

1. International Association of Geodesy. Commission 3 - Earth Rotation and Geodynamics. (2012). http://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/handbook_2012/333_Commission_3.pdf.

2. Dermanis, A. (2009). The evolution of geodetic methods for the determination of strain parameters for earth crust deformation. In: *Terrestrial and stellar environment* / eds. D. Arabelos, M. Kontadakis, Ch. Kaltsikis, S. Spatalas. Publication of the school of rural & surveying engineering, Aristotle university of Thessaloniki, 107-144.

3. Schneider, D. (1982). *Complex Crustal Strain Approximation*. Institut für Geodäsie und Photogrammmetrie, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. http://e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:1494-01.pdf.

4. Grafarend, E.W., Voosoghi, B. (2003). Intrinsic deformation analysis of the Earth's surface based on displacement fields derived from space geodetic measurements. Case studies: present-day deformation patterns of Europe and of the Mediterranean area (ITRF data sets). *Journal of Geodesy*, 77(5-6), 303-326. doi: 10.1007/s00190-003-0329-2.

5. Pietrantonio, G., Riguzzi, F. (2004). Three-dimensional strain tensor estimation by GPS observations: methodological aspects and geophysical applications. *Journal of Geodynamics*, 38, 1-18. doi.org/10.1016/j.jog.2004.02.021.

6. Tadyeyev, O. (2018). Adaptyvni metody otsiniuvannia ta interpretatsii deformatsiinykh poliv Zemli z vykorystanniam GNSS-danykh [Adaptive methods of evaluation and interpretation of deformation fields of the Earth using GNSS data]. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva – Modern Achievements of Geodetic Science and Industry*, I(35), 71-78.

7. Sokolnikoff, I.S. (1964). *Tensor analysis: Theory and applications to geometry and mechanics of continua*. New York, London, Sydney, John Wiley & Sons.

8. Tadyeyev, O. (2015). Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni za danymy v heodezychnykh kryvoliniinykh systemakh koordynat [Evaluation of deformations of the Earth's surface based on data in geodetic curvilinear coordinate systems]. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva – Modern Achievements of Geodetic Science and Industry*, I(29), 48-52.

9. Tadyeyev, O. (2013). Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni z pozytsii teorii kvazikonformnykh vidobrazhen [Evaluation of deformations of the Earth's surface from the standpoint of the theory of quasi-conformal reflections]. *Heodeziia, kartohrafiia i aerofotoznimannia – Geodesy, Cartography and Aerial Photography*, 78, 140-145.

10. Tadyeyev, O. (2013). Otsiniuvannia deformatsii zemnoi poverkhni, redukovanoi na heosferu [Evaluation of deformations of the Earth's surface, reduced to the geosphere]. *Suchasni dosiahnennia heodezychnoi nauky ta vyrobnytstva – Modern Achievements of Geodetic Science and Industry*, II(26), 46-52.

11. Jahnke, E., Emde, F., Loesch, F. (1964). *Spetcialnye funktcii (Formuly, grafiki, tablitcy).* Per. nem. pod red. L.I.Sedova [*Special functions (Formulas, graphs, tables).* Transl. German under the editorship L.I. Sedova]. Nauka.

12. Scripps Orbit and Permanent Array Center. http://sopac.ucsd.edu/sector.shtml; http://csrc-old.ucsd.edu/velocities.shtml.

13. Altamini, Z. (2018). *Relationship and Transformation between the International and the European Terrestrial Reference System. EUREF Technical Note 1*. Institut National de l'Information Géographique et Forestière (IGN), France. http://etrs89.ensg.ign.fr/pub/EUREF-TN-1.pdf.

14. Boucher, C., Altamini, Z. (2011). *Memo: Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign*. Institut National de l'Information Géographique et Forestière (IGN), France. http://etrs89.ensg.ign.fr/memo-V8.pdf.

15. Altamini, Z., Rebischung, P., Metivier, L., Collilieux, X. (2016). ITRF2014: a new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121 (B8), 6109–6131. doi: 10.1002/2016JB013098.

Отримано 03.06.2024

UDC 528.22:551.24

Oleksandr Tadyeyev

PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Geodesy and Cartography
National University of Water and Environmental Engineering (Rivne, Ukraine)
E-mail: o.a.tadyeyev@nuwm.edu.ua. **ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4566-0160. **ResearcherID:** B-6081-2019

MODELING OF HORIZONTAL DEFORMATIONS OF THE EARTH'S SURFACE ON A REGIONAL SCALE USING GNSS DATA (ON THE EXAMPLE OF THE TERRITORY OF EUROPE)

The results of a scientific and methodological study of the problem of evaluation of horizontal deformations of the Earth's surface based on the data of global navigation satellite systems (GNSS) are presented in the article. The results of static modeling of horizontal deformations of the Earth's surface on a regional scale using methods based on the theory of transformations of images of the Riemannian space in the form of diffeomorphic manifolds are presented. The methods are based on the properties of elementary manifolds of the Euclidean type of dimension N=2 in the form of a tangent plane with parameterization by a rectangular coordinate system and tangent curvilinear surfaces of rotation with parameterization by spherical and ellipsoidal systems. Solutions of problems on these surfaces were achieved by methods of the projective differential geometry. The modeling was implemented using a sample of coordinates of GNSS stations on the territory of Europe during 2008-2014. The sample was formed based on the JPL Comb database of the SOPAC archive. Functional models of the deformation are constructed by basic functions in the form of series of Legendre polynomials of various degrees and orders on the plane and in the form of series of spherical functions of various degrees and orders on the geosphere and the Earth's ellipsoid of rotation. Results of calculating the characteristics of horizontal deformations of the Earth's surface reduced to these modeling surfaces and their comparative analysis are presented. The obtained results confirmed the deformations of a non-linear nature. The results of the evaluation of angular distortions of curvilinear coordinate systems are presented. Comparison of the obtained results with their analogues in the transformations of the ITRF-ETRF reference systems during 2008-2014 showed discrepancies within the limits of their calculation accuracy.

***Keywords**: GNSS; modeling surface; basic function; approximation; metric tensor; deformation.*
Table: 3. Fig.: 4. References: 15.

Тадєєв О. А. Моделювання горизонтальних деформацій земної поверхні регіонального масштабу з використанням GNSS-даних (на прикладі території Європи). *Технічні науки та технології.* 2024. № 2(36). С. 319-330.