

**Олексій Сергійович Козирєв¹, Олексій Дмитрович Кагляк²,
Максим Вікторович Романенко³, Віктор Леонідович Дубнюк⁴,
Юрій Валентинович Ключников⁵**

¹старший викладач кафедри лазерної техніки та фізико-технічних технологій
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)
E-mail: kozyriev.oleksii@lil.kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5385-8578>

²кандидат технічних наук, доцент кафедри лазерної техніки та фізико-технічних технологій
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)
E-mail: kaglyak.olexa@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5602-543X>

³аспірант кафедри лазерної техніки та фізико-технічних технологій
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)
E-mail: m.romanenko@kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8803-2278>

⁴старший викладач кафедри лазерної техніки та фізико-технічних технологій
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)
E-mail: v.dubniuk@kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6146-9265>

⁵кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри лазерної техніки та фізико-технічних технологій
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського» (Київ, Україна)
E-mail: yu.klyuchnikov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1970-6340>

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЛАЗЕРНОГО НАГРІВАННЯ МЕТАЛІВ НА ОСНОВІ АНАЛІЗУ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ

Розглянуто тривимірну математичну модель теплопровідності під впливом лазерного джерела теплоти та розробку чисельного методу розв'язання оберненої задачі, що дозволяє реконструювати технологічні параметри обробки. Запропонована модель поєднує представлення поглиненої лазерної енергії з просторовою дискретизацією променя на кільцеві зони та сектори, що дозволяє апроксимувати розподіл реальної інтенсивності. Задача прямої теплопровідності вирішується за допомогою схеми скінченних різниць. Обернена задача формулюється як мінімізація функціоналу залишків. Модель може бути застосована для розробки та оптимізації систем керування та прогнозного моделювання в промислових лазерних технологіях.

Ключові слова: лазерний нагрів; теплопровідність; обернена задача; числове моделювання; температурне поле; лазерна термообробка.

Рис.: 4. Табл.: 3. Бібл.: 30.

Актуальність теми. Лазерна обробка матеріалів є однією з найбільш інноваційних технологій сучасності, яка широко використовується в таких галузях, як машинобудування, авіаційна промисловість, медицина, мікроелектроніка тощо. Висока точність та контрольованість процесу, дозованість вводу енергії в зону обробки та її висока концентрація забезпечують унікальні можливості для обробки різних матеріалів.

У процесах лазерної термічної обробки, зварювання, наплавлення, поверхневого гартування та лазерного згинання саме температурні поля визначають розвиток фазових перетворень, структуру матеріалу, формування залишкових напружень і деформацій. Для коректного проектування таких процесів потрібні моделі, здатні адекватно відтворювати теплові процеси в металі. Сучасні тенденції розвитку лазерних технологій — зокрема, адитивне виробництво, мікрообробка та прецизійні процеси — вимагають підвищення точності математичного моделювання. Тому актуальність дослідження визначається потребою підвищення точності прогнозування теплових процесів при лазерній дії на метали, що є ключовим для забезпечення керованого термічного впливу та формування необхідних властивостей матеріалу.

Постановка проблеми. Однак для забезпечення необхідної точності та якості обробки важливо розуміти теплові процеси, що відбуваються під час дії лазерного випромінювання. Точне моделювання теплових полів і врахування фазових переходів дозволяє прогнозувати кінцевий результат та оптимізувати параметри технологічного процесу. Разом з тим, задача відтворення технологічних параметрів обладнання для отримання необхідного термічного стану в зоні обробки ще немає універсального вирішення.

Через те, що основною дією лазерного променя в більшості його застосувань є термічна дія, така задача відтворення може бути принаймні частково зведена до зворотної задачі теплопровідності.

Прямі задачі теплопровідності – такі, для яких відомі граничні умови, початковий стан і властивості матеріалу, а все температурне поле в моделі можна обчислити. Навпаки, зворотна проблема визначається як визначення невідомих причин на основі спостереження за їхніми наслідками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв'язання ІНСР (Inverse Heat Conduction Problem) часто потребує використання складної математичної моделі [1–4]. З цієї причини ідентифікація перехідних процесів є важкою для багатьох інженерів. Широко використовувані комерційні програми для моделювання теплового потоку важко застосовувати, оскільки вони вимагають визначення всіх граничних умов. Проте в задачах зворотної теплопровідності часто граничні умови не можна визначити і їх обчислюють, наприклад, на основі температури всередині моделі при послідовному підході Бека [4,5]. Комерційне програмне забезпечення ANSYS Multiphysics, яке використовує метод скінченних елементів (FEM), застосовано в [6]. Невідому граничну умову представляли як сходову або поліноміальну функцію.

Наведені методи вимагали вимірювань, на основі або з використанням яких відтворювалися граничні умови. Натомість в [7] вимірювання використовувалися для відтворення джерела теплоти. Потім зв'язки між параметрами процесу та геометрією шару оболонки й параметрами джерела теплоти виводилися за допомогою регресійного аналізу. Спосіб вирішення нестационарних зворотних задач теплопровідності на основі способу граничних елементів (BEM) і способу завдання послідовних функцій (SFEM) розглянуто в [8], представлено метод BEM та метод послідовної специфікації функцій, які використовуються для дослідження зворотного завдання ідентифікації граничного теплового потоку. У методі прямі задачі вирішувалися за допомогою BEM і використовувалися для розрахунку необхідного значення температури дискретної точки.

Зворотні задачі теплопровідності математично класифікуються як неправильно поставлені, тому для перетворення неправильно поставленої ІНСР у коректну зазвичай потрібні спеціальні методи вирішення. Попри те, що деякі аналітичні рішення доступні для цієї мети [9–13], їхнє застосування в ІНСР обмежене. З цієї причини було розроблено ряд чисельних підходів для вирішення ІНСР [14].

Більшість чисельних методів повторюють обернену задачу як задачу мінімізації за методом найменших квадратів у всій області часу або в послідовних інтервалах часу. Серед них метод спряженого градієнта (CGM) отримує все більше уваги, оскільки він може покращити швидкість збіжності зворотної оцінки шляхом вибору напрямку спуску як лінійної комбінації напрямку градієнта на поточній ітерації з напрямком спуску на попередній ітерації [15].

Також певну цікавість викликає розробка нелінійних зворотних підходів до оцінки теплофізичних властивостей і коефіцієнтів конвективної теплопередачі на границях [16]. Проте більшість алгоритмів мали справу з одно- або двомірними задачами.

Крім методів, які можна віднести до спеціальних, потрібно відзначити певні зусилля в напрямку знаходження фундаментального (MFS) рішення ІНСР [17], коли рішення отримувалося через перетворення змінних. Потім для розв'язання отриманого матричного рівняння, яке є дуже погано обумовленим, застосовуються розклад усіченого сингулярного значення та критерій L-кривої. Схожий підхід має місце при використанні методу комплексного диференціювання змінних (CVDM) для методу кінцевих елементів (FEM) [18]. Тут спочатку встановлюються комплексні змінні FEM, потім точно оцінюються ключові параметри алгоритму Левенберга-Марквардта.

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Постановка обернених задач з граничними умовами Неймана (II роду) з нелінійними, себто залежними від температури теплофізичними властивостями, у 3D-конфігурації практично не ставилася, а саме цей тип граничних умов (заданий тепловий потік на поверхні) є притаманним задачам лазерного нагрівання. Тому виникає необхідність у розробці чисельного методу для вирішення зворотної задачі теплопровідності на основі аналізу теплових полів з метою визначення технологічних параметрів обладнання для проведення певної лазерної обробки матеріалів з необхідними вихідними параметрами.

Мета дослідження. Проаналізувати існуючі підходи до вирішення зворотних задач теплопровідності. Розробити чисельну модель, що пов'язує енергію, яка переноситься лазерним променем, теплофізичні властивості матеріалу та умови теплообміну з термічним впливом випромінювання, а також зворотну модель, що пов'язує параметри температурного поля з технологічними параметрами обладнання. Порівняти отримані результати з результатами за модельним методом (FEM) та з експериментальними даними. Об'єктом дослідження є процеси лазерної взаємодії з матеріалами. Предметом дослідження є можливість відтворення технологічних параметрів обробки теплових полів при лазерній обробці металів.

Виклад основного матеріалу

Пряма задача лазерного нагрівання. При лазерній обробці визначальним фактором, що визначає результати обробки, є нагрівання вище певної межі. Задача полягає в тому, щоби знайти параметри обробки, які б забезпечили такий перегрів. Для цього можна використати будь-яку теплову модель, яка забезпечує відносно високу швидкість розрахунків і дає набір прямих залежностей температури від керованих факторів і яка забезпечує задовільну точність. Це дозволить побудувати модель, яка б пов'язувала невідомі параметри процесу з необхідною температурою до якої потрібно нагріти.

Для прогнозування результатів операцій лазерної обробки матеріалів використовують різні фізичні або статистичні моделі. Причому, всі вони мають ті чи інші недоліки, які знижують точність або обмежують можливість прогнозування. До таких недоліків слід віднести обмежений облік факторів, що значимо впливають на результати обробки (температурну залежність параметрів мішені, що змінюється в процесі взаємодії, форму лазерного променя, динаміку різних фаз матеріалу) у фізичних моделях, і обмеженість у застосуванні та високу трудомісткість при побудові статистичних моделей. З метою підвищення точності фізичного моделювання пропонується дискретизувати як лазерний промінь, так і заготовку (мішень).

Скінченно-різницева схема. Розглянемо теплову дію лазерного променя на матеріал мішені. Для цього будемо використовувати явну інтерполяційну схему рішення задачі нагрівання. У цьому випадку використання змінного кроку сітки буде неекономічним [19]. Тоді вираз для температури з використанням центральної різницевої схеми апроксимації матиме вигляд:

$$T_{i,j,k}^{s+1} = T_{i,j,k} + \frac{\lambda(T_{i,j,k})\Delta t}{c(T_{i,j,k})\rho(T_{i,j,k})} \times [T_{i-1,j,k} + T_{i+1,j,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j,k-1} + T_{i,j,k+1} - 6T_{i,j,k}] \quad (1)$$

(для простоти запису індекс s у правій частині опущено). Вираз (1) дозволяє визначити температуру всередині тіла в поточний момент часу s , знаючи температуру в попередній момент часу $s-1$ у всіх внутрішніх точках тіла. Таким чином, для розрахунків за цією формулою необхідно знати температуру на границі тіла.

Для цього уявимо обсяг мішені, як сукупність елементарних об'ємів (Рис. 1), які за формою являють собою куб з ребром, рівним кроку сітки h і, відповідно, обсягом $\Delta V = h^3$. Якщо крок досить малий, можна вважати, що елементарний об'єм має такі властивості:

- у всіх точках елементарного об'єму температура однакова в будь-який момент часу;
- в елементарному об'ємі всі теплофізичні характеристики матеріалу, які залежать від температури, однакові;
- між сусідніми елементарними об'ємами є повний теплової контакт.

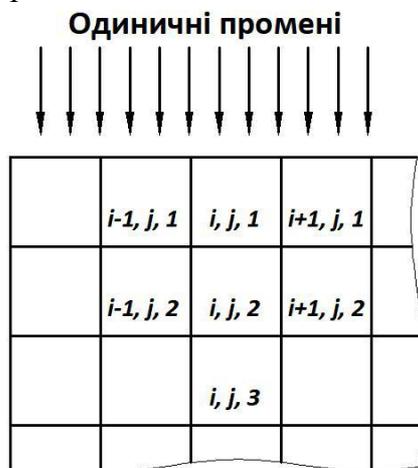


Рис. 1. Матеріал мішені у вигляді елементарних об'ємів

Внаслідок малості часу впливу випромінювання, з теплового балансу елементарного об'єму виключені конвективний і променевий теплообміни.

Для елементарних об'ємів, які розташовані на поверхні, баланс енергії має вигляд

$$Q_A = Q_\lambda + Q_T,$$

де $Q_A = \sum_{i=1}^n A_i(T) E_i$ – сумарна поглинена даним елементарним об'ємом енергія;

n – кількість променів на поверхні;

Q_λ – теплота, отримана або втрачена елементарним об'ємом за рахунок механізму теплопровідності;

Q_T – теплота, що залишилася в елементарному обсязі і яка призводить до підвищення температури.

У силу малості кроку за часом будемо вважати, що в результаті поглинання елементарним об'ємом кількості теплоти Q_A його температура миттєво збільшилася на величину

$$\Delta T_A = \frac{Q_A}{\Delta V \rho c}.$$

Кількість теплоти, що проходить за час Δt через площу h^2 , буде

$$\Delta Q = -\lambda \cdot \Delta T \cdot h^2 \cdot \Delta t,$$

де ΔT – різниця температур елементарних об'ємів, що взаємодіють.

Остаточно температуру елементарного об'єму, який належить поверхні, можна визначити, як

$$\Delta T = \frac{Q_\lambda}{\Delta V \rho c} = \frac{Q_A - Q_T}{\Delta V \rho c} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i(T) E_i - \sum_{i=1}^{N_n} \Delta Q_i}{\Delta V \rho c},$$

де N_n – чисельність взаємодіючих (сусідніх) елементарних об'ємів, яке може лежати в діапазоні від одиниці (для ізолюваного об'єму) до п'яти (об'єм належить поверхні напів-нескінченного тіла).

Прийнята різницева схема вважається придатною, а рішення стійким, якщо при зменшенні кроку по простору воно безперервно сходиться до точного рішення вихідного різницевого рівняння. Згідно з вимогою стійкості рішення рівняння теплопровідності різницевою методом на крок за часом накладається обмеження $F_o \leq 0,5$, тобто

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2a_{\max}}$$

де a_{\max} – максимальне значення теплопровідності для можливого діапазону температур.

Таким чином, алгоритм розрахунку температур на даному етапі, за відсутності фазових переходів, виглядає так:

- розрахунок кількості променів, що потрапляють на кожен розташований на поверхні елементарний об'єм;
- розрахунок миттєвого збільшення температури для поверхневих об'ємів;
- розрахунок зміни кількості теплоти в поверхневих елементарних об'ємах за рахунок механізму теплопровідності;
- розрахунок температури поверхневих елементарних об'ємів;
- розрахунок температур у внутрішніх елементарних об'ємах.

Якщо температура елементарного об'єму досягає температури фазового переходу, в розрахунку температур необхідно враховувати теплоту фазового переходу. Найпростіше це можна зробити [19], з огляду на зміну об'ємної теплоємності при фазовому переході:

$$c(T)\rho(T) = c_v + L_m \delta(T - T^*).$$

Використання граничних умов. Під час обробки лазерним променем виникає необхідність математичного моделювання процесу нагрівання. Як правило, неможливо отримати рішення диференціального рівняння теплопровідності в замкнутому вигляді, тому вдаються до різних чисельних методів, таких як метод кінцевих різниць або кінцевих об'ємів. Останній має певні переваги, серед яких збереження по всій області таких величин, як енергія системи та теплові потоки, задовільна швидкість розрахунку та легкість розбиття тіла на елементи різних геометричних типів. Водночас можуть виникнути певні труднощі при описі граничних умов, оскільки для граничних контрольних об'ємів, порівняно з внутрішніми, змінюються умови теплообміну. Переважно розглядають два види граничних умов: умова Діріхле (задана температура границі) та умова Неймана (заданий потік теплоти на границі). Умову Діріхле простіше використовувати в алгоритмах, але для завдань лазерного нагріву характерна саме умова Неймана через інтенсивність випромінювання та оптичні характеристики поверхні. Спробуємо подати завдання нагріву лазерним випромінюванням, звівши умови на границі до умов Діріхле. Для цього пропонується розбити лазерний промінь на окремі промені та простежити їх взаємодію з розглянутими вище контрольними об'ємами на поверхні.

Поширення сферичної хвилі з довільного резонатора. При поширенні сферичної хвилі з довільного резонатора напрям вектора перенесення енергії (вектор Пойнтинга) буде збігатися з напрямком нормалі поверхні рівної фази в будь-якій точці цієї поверхні.

$$\omega(x) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda x}{\pi \omega_0} \right)^2}, \quad (2)$$

де ω_0 – радіус пучка в перетяжці резонатора.

Вираз (2) отримано для ідеального порожнього резонатора рішенням хвильового скалярного рівняння Гельмгольца [20]. За допомогою виразу (2) можна знайти граничний кут нахилу дотичної до $\omega(x)$ осі \vec{X} :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}.$$

Вираз $\frac{\lambda}{\pi\omega_0}$ називають дифракційною складовою Θ_d повної розбіжності. У свою чергу, повна розбіжність дорівнює $\Theta = \sqrt{\Theta_d^2 + \Theta_g^2}$, де Θ_g – Геометрична складова повної розбіжності [21]. Причому відомо, що у загальному випадку геометрична складова значно перевищує дифракційну. Пояснюється це у тому числі і процесами, що відбуваються в реальному резонаторі, такими як роз'юстування, термолінза, конкуренція мод при «розгорянні» генерації в резонаторі і т. п. [21].

Таким чином, вираз (2) є недостатнім для повної характеристики випромінювання, що формується реальним непустим резонатором, який містить середовище з коефіцієнтом заломлення відмінним від коефіцієнта заломлення порожнього ізотропного простору.

Для опису поширення випромінювання, що формується реальним оптичним резонатором, можна запропонувати такий вираз [21]:

$$\omega(x) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2}, \quad (3)$$

де x_R – релеївська довжина, тобто відстань, на якій розмір променя збільшується у $\sqrt{2}$ раз порівняно з розміром у перетяжці. Причому і розмір променя у перетяжці, і релеївська довжина залежать не тільки від довжини хвилі випромінювання, а й від модового складу:

$$\begin{aligned} x_R &= \frac{\pi\omega_0^2}{M^2\lambda}; \\ \omega_0 &= M^2 \frac{\lambda}{\pi\Theta}, \end{aligned} \quad (4)$$

де Θ – повний кут розбіжності;

M^2 – модовий множник, який дорівнює одиниці для гаусівської моди та більше одиниці для мод вищого порядку.

Формули (2–4) можуть адекватно описати поширення лазерного випромінювання і, як буде показано нижче, перенесення енергії лазерного випромінювання. Однак усі ці формули повинні базуватися на експериментальних даних, вимірних конкретного випромінювача. Необхідно знати положення перетяжки всередині резонатора, а також виміряти розбіжність випромінювання та діаметр променя на певній відомій відстані від площини перетяжки.

Припустимо, що на підставі вимірювань отримано розбіжність випромінювання Θ та радіус променя ω_e на відстані від площини перетяжки x_e . Для спрощення запису введемо коефіцієнт

$$K = \frac{M^2\lambda}{\pi}.$$

Тоді можна записати:

$$\omega_0 = \frac{K}{\Theta}; \quad x_R = \frac{\omega_0^2}{K}.$$

Підставивши ці вирази в (3), отримаємо

$$\omega(x) = \frac{1}{\Theta} \sqrt{K^2 + \Theta^4 x^2} \quad (5)$$

звідки:

$$K = \Theta \sqrt{\omega_e^2 - \Theta^2 x_e^2}.$$

Визначивши K , можна обчислити значення модового множника:

$$M^2 = \frac{\pi K}{\lambda}.$$

Також, скориставшись (5), можна розрахувати радіус пучка в перетязці ω_0 .

$$\omega(x) = \sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x^2} \tag{6}$$

Напрямок вектора Пойнтінга збігатиметься з напрямом дотичної $\omega(x)$, тобто:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\Theta^2 x}{\sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x^2}} \tag{7}$$

Очевидно, що вираз (6) описуватиме поширення енергії з точки з координатами $(0, \omega_0)$ у двовимірній системі координат XOZ (рис. 2). Для повного опису розповсюдження енергії необхідно знайти рівняння розповсюдження енергії з точки з координатами $(0, r_1)$, причому $0 \leq r_1 \leq \omega_0$. Шукатимемо таке рівняння за аналогією з (6) у вигляді:

$$r(x) = \sqrt{r_1^2 + T^2 x^2}, \tag{8}$$

де T – невідомий параметр, який необхідно визначити. Для цього розглянемо на осі \vec{X} точку з координатами $(x_e, 0)$. Очевидно, що радіус променя в площині, перпендикулярній вісі \vec{X} і такій, що проходить через точку $(x_e, 0)$, буде

$$\omega(x_e) = \sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x_e^2} = \omega_e.$$

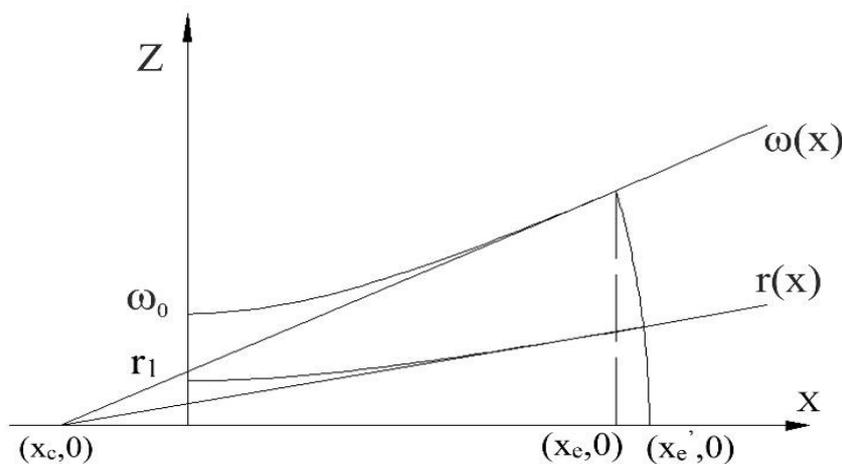


Рис. 2. Перенесення енергії довільним променем $r(x)$

Визначивши кут нахилу дотичної в точці $(x_e, 0)$ до кривої $\omega(x)$ можна знайти центр кривизни хвильового фронту, що проходить через точку з координатами (x_e, ω_e) зі співвідношення:

$$\frac{\omega(x_e)}{x_e - x_c} = \frac{d\omega(x_e)}{dx},$$

звідки:

$$x_c = -\frac{\omega_0^2}{\Theta^2 x_e}.$$

Радіус кривизни цього хвильового фронту можна визначити, як відстань між точками $(x_c, 0)$ і $(x_e, \omega(x_e))$:

$$R = \sqrt{(x_e - x_c)^2 + \omega(x_e)^2} = \frac{\omega(x_e)}{\Theta^2 x_e} \sqrt{\omega(x_e)^2 + \Theta^4 x_e^2}. \quad (9)$$

Крива $r(x)$ перетинає еквіфазну поверхню в точці з координатами $(x'_e, r(x'_e))$. Оскільки форма хвильового фронту вважається сферичною, мають виконуватися дві умови: дотична до кривої $r(x)$, що проходить через точку $(x'_e, r(x'_e))$, повинна також проходити через центр кривизни хвильового фронту $(x_c, 0)$ (умова 1) так само, як і дотична до $\omega(x)$ в точці $(x_e, \omega(x_e))$ (умова 2).

Оскільки радіус кривизни хвильового фронту R постійний у всіх точках цього фронту, відстань між точками $(x_c, 0)$ та $(x_e, \omega(x_e))$ дорівнює відстані між точками $(x_c, 0)$ і $(x'_e, r(x'_e))$.

При виконанні першої умови отримуємо:
Для кривої $\omega(x)$:

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{\Theta^2 x_e}{\sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x_e^2}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x_e^2}}{x_e - x_c}. \quad (10)$$

І аналогічно для кривої $r(x)$:

$$\frac{dr(x)}{dx} = \frac{T^2 x'_e}{\sqrt{r_1^2 + T^2 x_e'^2}} = \frac{\sqrt{r_1^2 + T^2 x_e'^2}}{x'_e - x_c}. \quad (11)$$

Перетворюючи (10) і (11), отримуємо:

$$\begin{cases} -\Theta^2 x_e x_c = \omega_0^2 \\ -T^2 x'_e x_c = r_1^2 \end{cases} \quad (12)$$

Звідки:

$$T = \frac{r_1}{\omega_0} \Theta \sqrt{\frac{x_e}{x'_e}}. \quad (13)$$

Розглянемо у виразі (13) множник під коренем. Знайдемо максимальну величину для співвідношення $\sqrt{\frac{x_e}{x'_e}}$, яка, очевидно, буде при $r_1=0$. При виконанні умови (2) співвідношення $\sqrt{\frac{x_e}{x'_e}}$ можна замінити наступним виразом:

$$\frac{x_e}{x'_e} = \frac{x_c + R \cos \Theta}{x_c + R}.$$

Однак оскільки розбіжність лазерного випромінювання становить всього кілька тисячних радіанів, можна стверджувати, що $\cos \Theta \approx 1$, звідки і

$$\sqrt{\frac{x_e}{x'_e}} \approx 1.$$

Як наслідок, остаточно отримуємо:

$$T = \frac{r_1}{\omega_0} \Theta.$$

а вираз (8) запишемо як

$$r(x) = \sqrt{r_1^2 + \frac{r_1^2 \Theta^2}{\omega_0^2} x^2} = \frac{r_1}{\omega_0} \sqrt{\omega_0^2 + \Theta^2 x^2} = \frac{r_1}{\omega_0} \omega(x). \quad (14)$$

За допомогою виразу (14) можна одержати напрямок вектора Пойнтінга в будь-якій точці в перерізі променя для будь-якої координати x . Крім того, за допомогою (14) можна знайти однозначну відповідність між інтенсивністю одиничного променя у будь-якій точці площини перетяжки та інтенсивністю в будь-якій точці в інших площинах перерізу. Для цього необхідно знати розподіл потужності у перерізі пучка.

Перенесення енергії лазерним випромінюванням. В ідеальному резонаторі інтенсивність основної моди розподілена за законом Гауса $I = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right)$, де $r^2 = y^2 + z^2$ – відстань від осі пучка, а ω_0 відіграє роль масштабного множника [22]. Однак у реальних резонаторах розподіл інтенсивності може відрізнятися від розподілу в ідеальному резонаторі. Причинами цього можуть бути роз'юстування дзеркал резонатора, розбіжність вісі активного елемента з віссю резонатора, теплові деформації активного елемента, неідеальна форма дзеркал резонатора [23]. Крім того, неоднакова освітленість перерізу активного елемента може призвести до зміщення точки з максимумом інтенсивності від центру. Важливу роль відіграє також та обставина, що в реальному резонаторі практично неможливо передбачити кількість мод, що збуджуються, і розподіл сумарної інтенсивності за модами різних порядків [23].

У зв'язку з цим вихідний розподіл інтенсивності випромінювання по перерізу необхідно визначати експериментально, з подальшою апроксимацією. Як апроксимуючу функцію можна запропонувати:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{(y - y_c)^2}{\omega_y^2} - \frac{(z - z_c)^2}{\omega_z^2}\right). \quad (15)$$

У цьому виразі y_c і z_c – координати точки в перерізі променю, де інтенсивність максимальна, ω_y^2 і ω_z^2 – масштабні коефіцієнти по осях y і z відповідно. У загальному випадку розподіл інтенсивності може бути не вісесиметричним, тобто $\omega_y^2 \neq \omega_z^2$. Розрахувати невідомі параметри y_c , z_c і ω_z^2 можна за методом найменших квадратів (МНК) на підставі експериментальних даних, отриманих, наприклад, методом скануючої діафрагми. Оскільки діаметр променю в сканованому перерізі пучка відрізняється від розміру променю в перетяжці, зручно перейти до відносних (нормованих) одиниць вимірювання, розділивши інтенсивність на максимальну інтенсивність, а y , z і ω_z розділити на радіус пучка в сканованому перерізі. У цьому випадку координати y і z будуть в межах від -1 до +1, а інтенсивність – у межах від 0 до 1. Таким чином, можна прирівняти $I_0=1$. Для спрощення розрахунків МНК зручно замінити функцію відгуку її натуральним логарифмом: $I' = \ln(I)$. Остаточно замінюємо вираз (15) на:

$$I' = -(y - y_c)^2 \omega_y^{-2} - (z - z_c)^2 \omega_z^{-2}. \quad (16)$$

Залишається визначити потужність, що переноситься одиничним променем, залежно від координат цього променю. Для цього уявімо перетин пучка у вигляді кола, розділе-

ного на кільцеві ділянки, які, у свою чергу, розділені на сектори, кожен з яких буде джерелом одного променя (рис. 3). Очевидно, що кількість кільцевих ділянок дорівнюватиме $N_r = \frac{r}{\Delta_r}$, де Δ_r – крок по радіусу i , одночасно, радіус центральної (кругової) зони.

Прийmemo центральну зону за початок відліку. Її площа буде $S_1 = \pi(\Delta_r)^2$. Для отримання координат вузлових точок, які будуть початками променів, скористаємося методами, які застосовуються при апроксимації аберацій, оскільки очевидно, що підсумковий розподіл поля на мішені є наслідком сферичних аберацій на елементах оптичної системи [24]. Відповідно, для знаходження вузлових точок вимагатимемо максимальної обумовленості конструкційної матриці. Тоді, якщо індекс кільцевої зони i набуває значення $[1 \dots N_r]$, число радіальних зон у кільцевій буде

$$N_i = 2i - \text{int}\left(\frac{1}{i}\right).$$

Площа i -ї кільцевої зони буде

$$S_i = \pi\Delta_r^2 i^2 - \pi(\Delta_r)^2 (i-1)^2 = \pi\Delta_r^2 (2i-1).$$

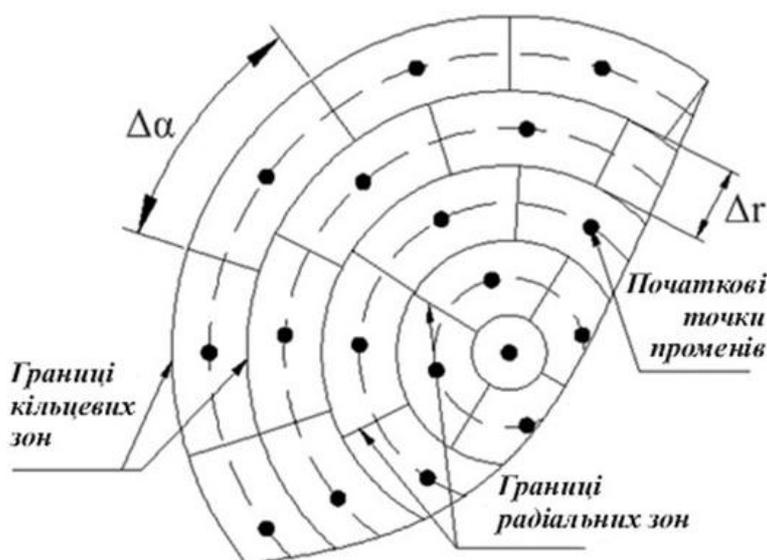


Рис. 3. Початкові координати векторів перенесення енергії випромінювання

Якщо кожна кільцева зона розбивається на радіальні зони однакової площі (елементарні майданчики), то площа кожного елементарного майданчика в i -ї кільцевій зоні буде

$$S_{iE} = \frac{S_i}{N_i}.$$

Або для кільцевої зони, починаючи з другої:

$$S_{iE} = \pi\Delta_r^2 \frac{2i-1}{2i}.$$

Загальна кількість променів у променевому пакеті:

$$N_\Sigma = 1 + \sum_{i=2}^{N_r} 2i = N_r^2 + N_r - 1.$$

Таким чином, кожен елементарний майданчик, а отже, і кожен промінь пакета R_{ij} можна характеризувати двома індексами i та j , з яких перший індекс кільцевої зони ($i=1 \dots N_r$), другий індекс сектора кільцевої зони ($j=1 \dots N_i$). Координати початку кожного

променю можуть бути визначені в циліндричних координатах радіус-вектором ρ і кутом повороту φ :

$$\begin{cases} \rho_i = \Delta_r \left(i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{int} \left(\frac{1}{i} \right) \right), \\ \phi_{ij} = \frac{360^\circ}{N_i} (j-1) + \alpha \end{cases},$$

де N_i – кількість радіальних зон у i – кільцевій зоні ($i=1..N_r$), j – індекс радіальної зони ($j=1..N_i$). Початковий кут повороту α введений виключно з міркувань рівномірного заповнення перерізу променя вузловими точками (початковими координатами променів) і може бути представлений у вигляді:

$$\alpha = \left(\frac{360^\circ}{N_i} \Big|_{i=2} \& - \frac{360^\circ}{N_i} \Big|_{i=N_r} \right) \frac{1}{N_r-1} = \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{N_r} \right) \frac{1}{N_r-1}.$$

У декартовій системі координат:

$$\begin{cases} y_{ij} = \rho_i \cos(\phi_{ij}) \\ z_{ij} = \rho_i \sin(\phi_{ij}) \end{cases}$$

Потужність, що знімається з одного елементарного майданчика за весь час дії імпульсу, дорівнює: $P_{ij} = \iint_{S_{ij}} IdS$, де S_{ij} – площа елементарного майданчика. Однак інтеграл від функції виду (15) не може бути представлений у замкнутій формі. Для його обчислення, враховуючи, що крок по радіусу Δ_r досить малий, можна скористатися теоремою про середнє значення подвійного інтеграла:

$$P_{ij} = S_{ij} \cdot I(y_{ij}, z_{ij}),$$

де $I(y_{ij}, z_{ij})$ – значення інтенсивності у початковій точці променя. Тоді вся потужність імпульсу може бути розрахована за формулою.

$$P_\Sigma = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_i} P_{ij}.$$

Залишається визначити потужність, що знімається з елементарного майданчика за певний часовий проміжок Δt у середині всього імпульсу тривалістю τ . Видно, що форма розподілу інтенсивності (15) визначається масштабним множником I_0 , причому цей множник змінюється у часі, тобто вираз (15) можна записати, як:

$$I = I_0(t) \exp \left(- \frac{(y - y_c)^2}{\omega_y^2} - \frac{(z - z_c)^2}{\omega_z^2} \right).$$

Визначимо спад зниження інтенсивності (потужності) у вузлі R_{ij} відносно максимуму:

$$\mu_{ij} = \frac{I(y_c, z_c)}{I_{max} \exp \left(- \frac{(y - y_c)^2}{\omega_y^2} - \frac{(z - z_c)^2}{\omega_z^2} \right)}.$$

Очевидно, що поточне значення потужності буде сумою потужностей, що переносяться кожним променем променевого пакета. Таким чином, потужність, що переноситься одним променем R_{ij} можна визначити, як:

$$P_{ij} = \frac{P(t_0)}{\Sigma_{\mu}} \mu_{ij},$$

де $P(t_0)$ – поточне значення потужності в момент часу (t_0) ; $\Sigma_{\mu} = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_i} \mu_{ij}$.

Також можна визначити кількість енергії, що виділилася за проміжок часу Δt та переноситься одним променем:

$$E_{ij} = \frac{P(t_0)}{\Sigma_{\mu}} \mu_{ij} \cdot \Delta t.$$

Проходження одиничного променя через оптичну систему. Наведені вище положення щодо поширення лазерного випромінювання характеризують випромінювання поза межами резонатора. Тому для подальшого моделювання процесу необхідно розглянути перетворення променя оптичними елементами. Геометричні показники променя визначаються трьома параметрами перетворювальних елементів:

- кривизни поверхонь перетворювальних елементів;
- положення у просторі поверхонь перетворювальних елементів;
- коефіцієнти заломлення матеріалів перетворювальних елементів;

Оскільки поверхні в перетворювальних оптичних елементів або плоскі, або сферичні, розглянемо окремо поведінку одиничного променя при взаємодії з такими поверхнями.

Проходження променя через плоску поверхню. Промінь може бути заданий трьома координатами початку $r_1 = (x_1, y_1, z_1)$ та трьома напрямними косинусами $R = (X, Y, Z)$. Тоді рівняння променя у векторній формі матиме вигляд: $(r - r_1) \times R = 0$, або в координатній формі:

$$\begin{cases} Yx - Xy = x_1Y - y_1X \\ Zy - Yz = y_1Z - z_1Y \end{cases} \quad (17)$$

Знайдемо координати точки зустрічі променя та площини, $r_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Якщо площина задана вектором нормалі $N = (X_N, Y_N, Z_N)$ і точкою початку вектора нормалі (x_n, y_n, z_n) , то рівняння площини, що проходить через r_2 , має вигляд:

$$X_N x + Y_N y + Z_N z = X_N x_n + Y_N y_n + Z_N z_n. \quad (18)$$

Позначимо для компактності запису:

$$A_1 = x_1Y - y_1X, \quad A_2 = y_1Z - z_1Y, \quad A_3 = X_N x_n + Y_N y_n + Z_N z_n.$$

Координати точки зустрічі променя та площини є рішенням системи (17) та (18). За методом визначників:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} Y & -X & 0 \\ 0 & Z & -Y \\ X_N & Y_N & Z_N \end{vmatrix} = YZZ_N + XYX_N + Y^2Y_N \\ D_1 &= \begin{vmatrix} A_1 & -X & 0 \\ A_2 & Z & -Y \\ A_3 & Y_N & Z_N \end{vmatrix} = A_1ZZ_N + XYA_3 + A_1YY_N + XA_2Z_N \\ D_2 &= \begin{vmatrix} Y & A_1 & 0 \\ 0 & A_2 & -Y \\ X_N & A_3 & Z_N \end{vmatrix} = YA_2Z_N - A_1YX_N + Y^2A_3 \end{aligned} \quad (19)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} Y & -X & A_1 \\ 0 & Z & A_2 \\ X_N & Y_N & A_3 \end{vmatrix} = YZA_3 - XA_2X_N - A_1ZX_N - YA_2Y_N$$

$$x_2 = \frac{D_1}{D}; y_2 = \frac{D_2}{D}; z_2 = \frac{D_3}{D}.$$

Напрямок заломленого променя (X_2, Y_2, Z_2) знаходиться із закону заломлення:

$$(\vec{q}' - \mu\vec{q}) \times \vec{g} = 0,$$

де \vec{q} – падаючий промінь;

\vec{q}' – заломлений промінь;

\vec{g} – вектор нормалі;

$\mu = \frac{n}{n'}$, n, n' – відповідно відносні показники заломлення середовища падаючого променя і середовища заломленого променя.

Оскільки добуток векторів $(\vec{q}' - \mu\vec{q})$ і \vec{g} дорівнює нулю, ці вектори колінеарні, тобто відрізняються лише деяким скалярним множником Γ : $\vec{q}' = \mu\vec{q} + \Gamma\vec{g}$. Помноживши скалярний вираз (3.4) на \vec{g} , отримаємо:

$$\Gamma = \frac{c' - \mu c}{\|g\|},$$

де $c' = \|g\| \cos \alpha'$, $c = \|g\| \cos \alpha$. Тут α і α' – відповідно кут падіння та кут заломлення. Тоді:

$$c = \|g\| \frac{XX_N + YY_N + ZZ_N}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2}};$$

$$c'^2 = \|g\|^2 - \mu^2 (\|g\|^2 - c^2), c' = +\sqrt{c^2 - \mu^2 (\|g\|^2 - c^2)};$$

$$\begin{cases} X_2 = \mu \cdot X + \Gamma X_N \\ Y_2 = \mu \cdot Y + \Gamma Y_N \\ Z_2 = \mu \cdot Z + \Gamma Z_N \end{cases}.$$

Проходження променя через сферичну поверхню. Визначимо спочатку координати точки зустрічі променя та сферичної поверхні. Рівняння сфери запишемо у вигляді:

$$a^2 - 2bl + p = 0,$$

де l – відстань від початку променя до точки зустрічі;

$a = \rho_0$, де ρ_0 – кривизна поверхні: $\rho_0 = 1/r$.

$$b = X - \rho_0(xX + yY + zZ),$$

де (x, y, z) – координати вектора променя; (X, Y, Z) – напрямні косинуси вектора променя;

$$p = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2) - 2x;$$

$$l = \frac{b - c}{a},$$

де $c = \sqrt{b^2 - ap}$, або

$$l = \frac{P}{b + \sqrt{b^2 - ap}}$$

Тоді координати точки зустрічі променя та сфери можна визначити, як:

$$\begin{cases} x'_m = x + lX \\ y'_m = y + lY \\ z'_m = z + lZ \end{cases}$$

Нехай у декартовій системі координат вектор променя R заданий координатами початку вектора (x'_1, y'_1, z'_1) та напрямними косинусами (X, Y, Z) . Нехай центр сфери радіусом r знаходиться у точці з координатами (x'_c, y'_c, z'_c) . Тоді початок координат у системі Федера розташовано у точці $(x'_c - r, y'_c, z'_c)$, а центр сфери в координатах Федера – у точці $(r, 0, 0)$. Для переходу в систему координат необхідно перетворити координати вектора променя так, що $x = x' - x'_c + r, y = y' - y'_c, z = z' - z'_c$. Після знаходження точки зустрічі променя з поверхнею (x'_m, y'_m, z'_m) та розрахунку параметрів заломленого променя, необхідно провести перетворення отриманих координат: $x_m = x'_m + x'_c - r, y_m = y'_m + y'_c, z_m = z'_m + z'_c$.

Напрямок заломленого променя $R_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ знайдемо так само, як і у випадку з площиною, враховуючи, що довжина вектора нормалі

$$\|g\| = \sqrt{(r - x'_m)^2 + y'^2_m + z'^2_m},$$

а його напрямок

$$\left(\frac{r - x'_m}{\|g\|}, \frac{-y'_m}{\|g\|}, \frac{-z'_m}{\|g\|} \right)$$

або (X_N, Y_N, Z_N) .

Тоді

$$\Gamma = \frac{c' - \mu c}{\|g\|^2};$$

$$c'^2 = \|g\|^2 - \mu^2(\|g\|^2 - c^2);$$

$$\vec{R}_2 = \mu \vec{R} + \Gamma \vec{g}.$$

Віддзеркалення променя від плоскої поверхні. Нехай промінь заданий координатами початку $r_1=(x_1, y_1, z_1)$ та напрямними косинусами $R=(X, Y, Z)$. Косинус кута між векторами променя і нормалі дорівнює

$$\cos \alpha = \frac{XX_N + YY_N + ZZ_N}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2}}$$

де $N=(X_N, Y_N, Z_N)$ вектор нормалі.

Довжина падаючого променя:

$$L_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Довжина вектора, протилежного вектору нормалі, який складав би із вектором R прямокутний трикутник, дорівнює:

$$\|g'\| = \cos \alpha \cdot L_1,$$

де (x_2, y_2, z_2) – координати точки зустрічі променя з поверхнею, способи знаходження яких для площини і сфери описані вище. Тоді напрямком вектора відбитого променя можна визначити так: $\vec{R}_2 = \vec{R}_1 + 2\vec{g}'$, або

$$\begin{cases} X_2 = L_1 X - 2\|g'\| X_N \\ Y_2 = L_1 Y - 2\|g'\| Y_N \\ Z_2 = L_1 Z - 2\|g'\| Z_N \end{cases} .$$

Операції над оптичними елементами. Під операціями над оптичними елементами розумітимемо переміщення та обертання цих елементів.

Переміщення визначається вектором переміщень $D = (D_x, D_y, D_z)$, де D_i - величина зміщення по кожній з осей. Для отримання координат нового положення оптичного елемента необхідно до старих додати величину зміщення.

Для завдання повороту необхідно задати кут обертання, вісь обертання та координати точки, розташованої на осі обертання.

Кут повороту навколо кожної з осей координат можна задати як матриці повороту Φ . Тоді напрямком поверненого вектора буде $\vec{X}' = \Phi \vec{X}$, де \vec{X} – початковий вектор. Матриці повороту навколо осей координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x \\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{pmatrix} \\ \Phi_y &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{pmatrix} \\ \Phi_z &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0 \\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

де $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – кути повороту навколо осей X, Y, Z . Тоді матриця повороту матиме вигляд:

$$\Phi = \Phi_x \Phi_y \Phi_z. \tag{20}$$

Для знаходження координат точки початку вектора після повороту можна скористатися виразом: $r_1' = \Phi(r_1 - d)$, де Φ - матриця повороту, описана у виразах (19-20); r_1 - вихідні координати точки початку вектора; r_1' - координати точки початку вектора після повороту; $d = (x_d, y_d, z_d)$ - радіус-вектор, що вказує на початок координат системи, щодо якої здійснюється поворот;

Таким чином, ми отримали для кожного з променів у променевому пакеті напрямки розповсюдження, початкові координати й енергію, що переноситься одиничний довільним променем R_{ij} . Також отримана модель перетворення всього променя оптичною системою, яке можна розглядати з погляду проходження окремих променів пакета через, як правило, плоскі та сферичні поверхні, або відбиття від них. За таких умов досить легко можна знайти всі промені, що потрапляють на поверхню контрольного об'єму на границі

тіла, що нагрівається і, з урахуванням оптичних характеристик поверхні, визначити кількість теплоти, що передається контрольному об'єму поверхні.

$$Q_A = \sum_{k=1}^m A(T) E_{ijk}.$$

Тоді підвищення температури в такому контрольному об'єзі можна виразити через масу і теплоємність:

$$\Delta T = \frac{Q_A}{cm}.$$

Значення ΔT можна використовувати для завдання температури на границі в різнице-вих схемах методу кінцевих об'ємів (тобто, як умову Діріхле).

Зворотна теплова задача при лазерному згинанні. Моделювання процесу формування загалом складається з двох частин: вирішення задачі теплопровідності для отримання інформації про розподіл температури в зоні обробці, та вирішення задачі про деформацію заготовки в результаті нагрівання.

Залежно від конкретних обставин і потрібної точності, теплова задача може вирішуватися різними способами, як інтегруванням рівняння теплопровідності, так і чисельними методами: методами кінцевих різниць, кінцевих елементів або кінцевих об'ємів.

Для моделювання безпосередньо процесів формування лазерним променем можуть бути використані декілька механізмів термічного формування, зокрема механізм градієнта температури.

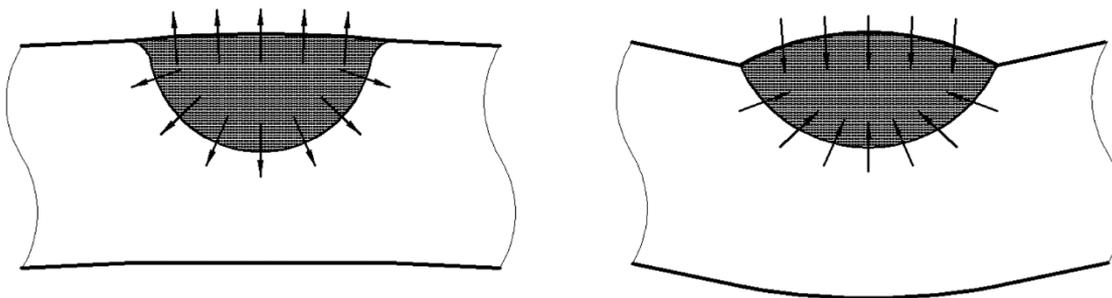


Рис. 4. Стадії формування згину при механізмі градієнта температури: зустрічне згинання і вигин [25]

Механізм градієнта температури [26, 27] - це механізм термічного формування, який в основному використовується для згинання та формування листового металу. Принцип дії цього механізму показаний на рис. 4.

Енергія лазерного променя локально поглинається верхньою поверхнею зразка. Це викликає градієнт температури по товщині зразка в зоні опромінення. Завдяки позитивному коефіцієнту теплового розширення більшості матеріалів теплове розширення в опроміненій області на верхній стороні листа більше, ніж розширення нижньої сторони. Різні розширення викликають згинання листа від лазерного променя. Цей вигин не є вільним, оскільки опромінена область зафіксована всередині навколишніх частин зразка. Таким чином, в опроміненій області зразка виникає напруження, яке стискає з верхньої сторони. Крім того, затискання зразка може посилити цей ефект. Якщо це термічне напруження залишається нижче межі текучості матеріалу, яка змінюється через локальну зміну температури, деформація зразка є повністю пружною. Після припинення дії лазерного випромінювання і охолодження зразка деформація в цьому випадку не залишається. Якщо, навпаки, локальна напруга перевищує залежну від температури межю текучості в опроміненій області на

верхній стороні листа, відбувається локальне висаджування матеріалу. Це означає, що верхня сторона області опромінення пластично деформована. Після охолодження зразка теплове розширення опромінюваної області зникає і зберігається пластична деформація верхньої сторони. Це призводить до вигину зразка в бік лазерного променя.

Модель шукатимемо у вигляді [28]:

$$y^{(m)} = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_i^{(2)} x_i^2 + \dots + \sum b_i^{(m)} x_i^m + \dots + \sum b_{i(k)j(l)} x_i^k x_j^l, \quad (20)$$

де m – ступінь полінома, b – невідомі коефіцієнти полінома, всі ступені всіх факторів комбінуються між собою.

Спочатку методом найменших квадратів знаходяться коефіцієнти полінома. На першому етапі всі вони вважаються значущими, тобто суттєво впливають на вихідну величину. Для такого виду полінома розраховуємо оцінку максимальної правдоподібності

$$R_s = \frac{\sum (y_i - f_i)^2}{n - N_c}.$$

Надалі нашою метою буде саме мінімізація R_s .

Далі кожен зі складників перевіряється на значущість. Фактори або їх комбінації по одному видаляються з моделі й після кожного видалення розраховуються R_s . Якщо на черговому кроці він не зменшився, фактор повертають до моделі, і навпаки [29].

Особливістю запропонованого методу є спроби повернути раніше відкинуті фактори до моделі, також за допомогою розрахунку R_s . Попри неочевидність третього етапу, все ж стверджуємо його необхідність, яка була підтверджена практично.

Таким чином знаходимо оптимальну форму полінома для ступеня m за критерієм мінімізації R_s . Далі збільшуємо ступінь на одиницю та генеруємо модель для ступеня $m + 1$ та повторюємо попередні етапи. В результаті маємо два конкуруючих значення R_s .

Якщо виконується умова закінчення $R_s^{(m+1)} > R_s^{(m)}$, то остаточно приймаємо форму і ступінь полінома m , в іншому випадку збільшуємо ступінь на одиницю і повторюємо попередні етапи.

Такий підхід дозволяє знайти зв'язок між параметрами, що визначають температурне поле, та деформаціями, причому у відносно простій формі полінома. Виділивши ті фактори що піддаються керуванню, можна вирішити зворотну задачу, коли за необхідними параметрами виробу (кут згину за один прохід, зона термічного впливу тощо) можна визначити діапазон технологічних параметрів обладнання, які забезпечують відповідні параметри виробу.

Така задача вирішувалася для зразка зі сталі 65Г (AISI 1566) завтовшки 2 мм, яку необхідно було нагріти до 1200 °С. Як змінні фактори були обрані три: поглинута потужність випромінювання P_0 , радіус джерела теплоти r_0 та швидкість руху джерела теплоти поверхнею.

Кожен з факторів змінювався на 5 рівнях, що дало 125 розрахункових точок. Розрахунок температур проводився за наведеною вище прямою задачею лазерного нагрівання (1-19). Далі отримані результати служили основою для розрахунку невідомих коефіцієнтів моделі (20).

Перед оцінюванням невідомих коефіцієнтів фактори кодувалися, значущість факторів R_i оцінювалася:

$$R_i = \frac{(y_{\max} - y_{\min}) \cdot \bar{x}}{(x_{\max} - x_{\min}) \cdot \bar{y}}. \quad (21)$$

Таке співвідношення дозволило оцінити ступінь впливу кожного з факторів і відповідно обрати межі кодованих величин так, щоби однакова зміна будь-якого з факторів призводила би до приблизно однакової зміни вихідної величини. Далі визначалися рівні факторів:

$$x_i = \frac{R_i \cdot (y_i - \bar{y})}{(y_{max} - y_{min})}$$

Діапазони варіювання факторів і їх кодовані за (21) величини наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Діапазони варіювання факторів і їх кодовані значення

P ₀		r ₀		V	
Потужність, Вт	Кодоване значення	Радіус фокусування, см.	Кодоване значення	Швидкість, см/сек	Кодоване значення
400	-1	-1,15	0,5	-1,14	0,83
450	-0,5	-0,575	0,75	-0,57	1,25
500	0	0	1	0	1,67
550	0,5	0,575	1,25	0,57	2,08
600	1	1,15	1,5	1,14	2,5

Етапи побудови полінома (табл. 2).

Таблиця 2 – Етапи побудови полінома виду (20)

Ступінь полінома	Оцінка максимальної правдоподібності, R _s	Кількість коефіцієнтів	Максимально можлива кількість коефіцієнтів
1	628,75	4	4
2	228,42	9	10
3	72,79	16	20
4	20,36	25	35
5	5,03	34	56
6	1,07	42	84

З табл. 2 видно, що ступені 1-3 дають недостатній рівень точності, 4 – задовільний, 5 – хороший і 6 – надмірний.

Звичайно, отримане рішення буде не єдиним в тому сенсі, що за побудованою моделлю одну і ту саму температуру можна отримати за різних наборів вхідних даних, тобто модель має незадіяні ступені свободи. Їх можна витратити, зафіксувавши деякі з факторів на рівнях обраних з третіх міркувань (можливості обладнання, тощо). У нашому прикладі були зафіксовані два фактори, а саме r₀ = 1 мм, V = 1 м/хв. Розрахунок за отриманою моделлю дав необхідне значення ефективної потужності 494 Вт, перевірючий розрахунок за методом кінцевих різниць – 508 Вт, тобто дуже близькі значення.

При одночасному збільшенні кількості факторів та порядку моделі складність останньої буде швидко зростати, тому виникає необхідність цю складність понизити. При побудові моделі був помічений тісний зв'язок між радіусом фокусування та швидкістю руху променя [30], тому для спрощення моделі їх пов'язали з властивістю матеріалу у комплексний безрозмірний параметр:

$$x_2 = \frac{V \cdot r_0}{4a}$$

Фактор x₁ так і залишився за потужністю. Результати моделювання наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Коефіцієнти полінома (20) для двох факторів

Фактори	Ступінь апроксимуючого полінома						
	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
x ₀	2214,705	2057,686	2020,503	2043,244	2055,174	2051,853	2049,687
x ₁	257,331	257,331	239,087	234,766	237,409	238,795	
x ₂	-2656,4	-3262,44	-2653,42	-2320,52	-2442,05	-2557,41	-2516,31

TECHNICAL SCIENCES AND TECHNOLOGIES

x_1x_2		-308,653	-379,07	-308,306	-269,626	-283,747	-297,151
x_2^2		4987,882	7496,894	5606,533	3849,988	4404,882	5094,673
x_1^3							402,333
$x_1x_2^2$			579,552	871,079	651,435	447,338	
x_2^3			-10928,6	-19159,6	-13473	-6008,29	-9342,95
$x_1x_2^3$				-1269,82	-2226,2	-1565,46	-698,116
x_2^4				25926,58	52713,47	33485,33	5034,451
x_1^5							-108,635

Закінчення таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^3x_2^2$							863,721
$x_1x_2^4$					3012,462	6124,886	3890,729
x_2^5					-68833	-155456	-74670,3
$x_1x_2^5$						-7997,85	-18062,7
x_2^6						203833,7	473842
$x_1^5x_2^2$							-233,215
$x_1x_2^6$							23683,85
x_2^7							-661898
R_s	204,586	86,197	37,057	15,811	6,569	2,299	0,737
Кількість коефіцієнтів	3	5	7	9	11	13	17

Видно, що складність моделі помітно зменшилася без зменшення точності. Як і у попередньому випадку, ступені 1-3 дають недостатній рівень точності, 4 - задовільний, 5 – хороший і 6,7 – надмірний.

Висновки. Розроблено чисельну модель для вирішення зворотної задачі теплопровідності, яка дозволяє визначати керовані технологічні параметри обладнання для досягнення потрібного розподілу температур у матеріалі під час лазерної обробки. Запропонований метод вирішення зворотної задачі теплопровідності дозволяє регулювати точність вирішення, яка загалом залежить від якості прямої моделі. Запропонована пряма модель, яка дозволяє докладно представити процес взаємодії лазерного випромінювання з матеріалом і проводити розрахунки з достатньою точністю в тому числі для матеріалів з нелінійними теплофізичними властивостями.

Серед певних недоліків запропонованого підходу можна відмітити певне спрощення умов нагрівання: використання умови Діріхле замість умови Неймана може не враховувати всі особливості конвективного і променевого теплообміну на поверхні. Для високої точності моделювання потрібні малі кроки дискретизації, що значно збільшує обчислювальну складність. Нелінійність залежності теплопровідності та теплоємності від температури враховувалася наближено, що могло впливати на точність при високих температурах.

Практичне значення результатів полягає в тому, що модель дозволяє оптимізацію параметрів лазерної обробки: прогнозувати оптимальні значення потужності, швидкості та діаметра променя для досягнення бажаних результатів.

Наступним кроком у можливішому розвитку такого підходу бачиться розширення моделі для врахування багатофазних процесів, таких як плавлення, випаровування та утворення плазми.

Модель застосовувалася для випадків нагрівання без фазового переходу на поверхні (лазерна поверхнева обробка, лазерне формування), тому як розширення її застосування можна розглядати інші технології, включаючи зварювання та розмірну обробку.

Результати дослідження можуть бути використані для оптимізації параметрів лазерної обробки, підвищення ефективності технологічних процесів та покращення якості оброблених матеріалів.

Список використаних джерел

1. Nakamura, T., et al. (2014). Inverse analysis for transient thermal load identification and application to aerodynamic heating on atmospheric reentry capsule. *Aerospace Science and Technology*.
2. Duda, P. (2015). Numerical and experimental verification of two methods for solving an inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
3. Jarny, Y., et al. (1991). A general optimization method using adjoint equation for solving multi-dimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
4. Beck, J. V. (1970). Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
5. Komínek, J., & Pohanka, M. (2016). Estimation of the number of forward time steps for the sequential Beck approach used for solving inverse heat-conduction problems. *Materiali in Tehnologije*, 50(2), 207–210.
6. Duda, P. (2016). A general method for solving transient multidimensional inverse heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93, 665–673.
7. Hao, M., & Sun, Y. (2013). A FEM model for simulating temperature field in coaxial laser cladding of Ti6Al4V alloy using an inverse modeling approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64, 352–360.
8. Wang, S., Deng, Y., & Sun, X. (2018). Solving of two-dimensional unsteady inverse heat conduction problems based on boundary element method and sequential function specification method. *Complexity*, 2018.
9. Monde, M. (2000). Analytical method in inverse heat transfer problem using Laplace transform technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
10. Huang, C. H., et al. (1999). A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
11. Zhou, J., et al. (2010). Inverse estimation of surface heating condition in a three-dimensional object using conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
12. Burggraf, O. R. (1964). An exact solution of the inverse problems in heat conduction theory and application. *ASME Journal of Heat Transfer*.
13. Langford, D. (1976). New analytical solutions of the one-dimensional heat equation for temperature and heat flow rate both prescribed at the same fixed boundary (with applications to the phase change problem). *Quarterly of Applied Mathematics*.
14. Zhou, J., Zhang, Y., Chen, J. K., & Feng, Z. C. (2012). Inverse estimation of front surface temperature of a plate with laser heating and convection–radiation cooling. *International Journal of Thermal Sciences*, 52, 22–30.
15. Bozzoli, F., Mocerino, A., Rainieri, S., & Vocale, P. (2018). Inverse heat transfer modeling applied to the estimation of the apparent thermal conductivity of an intumescent fire-retardant paint. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 90.
16. Segall, A. E. (2005). An inverse solution for determining arbitrary boundary conditions using a least-square approach. *ASME Journal of Heat Transfer*.
17. Dong, C. F., Sun, F. Y., & Meng, B. Q. (2007). A method of fundamental solutions for inverse heat conduction problems in an anisotropic medium. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(1), 75–82.
18. Zhang, B., Mei, J., Cui, M., Gao, X.-W., & Zhang, Y. (2019). A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 140.
19. Катрич, В. О., Майборода, Д. В., Погарський, С. О., & Просвірнін, С. Л. (2011). *Чисельні методи в прикладній фізиці*. Харків: Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна.
20. Мейтленд, А., & Данн, М. (1978). *Введення у фізику лазерів*. Москва: Наука.
21. Schwarzenbach, A. P., & Ladrach, P. (1995). *Recent progress in laser processing*. In *Proceedings of the International Symposium for Electro-Machining (ISEM)*. EPFL, Lausanne, Switzerland.
22. Байбородін, Ю. В. (1977). *Введення в лазерну техніку*. Київ: Техніка.
23. Anan'ev, Y. A. (1992). *Laser resonators and the beam divergence problem* (Series on Optics and Optoelectronics). Taylor & Francis.
24. Shannon, R. (1997). *The art and science of optical design*. Cambridge University Press.

25. Козирєв, О. С., Кагляк, О. Д., & Чухліб, С. В. (2024). Моделювання процесу нагрівання при лазерному згинанні. In *Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції «Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем»* (Т. 1, с. 161–162).
26. Pretorius, T. (2009). *Laser forming*. In *The theory of laser materials processing* (Springer Series in Materials Science, pp. 281–314). Springer.
27. Vollertsen, F. (1994). An analytical model for laser bending. *Lasers in Engineering*, 2, 261–276.
28. Козирєв, О. С., & Луценко, Д. В. (2021). Ітераційний підхід при розв'язанні зворотної задачі теплопровідності. In *КЗЯТПС – 2021 : матеріали тез доповідей XI Міжнародної науково-практичної конференції* (Т. 1, с. 160–162). Національний університет «Чернігівська політехніка».
29. Козирєв, О. С., Кагляк, О. Д., & Ритіков, Є. О. (2024). Зворотна теплова задача при лазерному згинанні. In *Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Комплексне забезпечення якості технологічних процесів та систем»* (Т. 1, с. 159–161). Чернігів.
30. Коваленко, В. С., Головка, Л. Ф., & Черненко, В. С. (1990). *Зміцнення та легування деталей машин променем лазера*. Техніка.

References

1. Nakamura, T., et al. (2014). Inverse analysis for transient thermal load identification and application to aerodynamic heating on atmospheric reentry capsule. *Aerospace Science and Technology*.
2. Duda, P. (2015). Numerical and experimental verification of two methods for solving an inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
3. Jarny, Y., et al. (1991). A general optimization method using adjoint equation for solving multi-dimensional inverse heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
4. Beck, J. V. (1970). Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
5. Komínek, J., & Pohanka, M. (2016). Estimation of the number of forward time steps for the sequential Beck approach used for solving inverse heat-conduction problems. *Materiali in Tehnologije*, 50(2), 207–210.
6. Duda, P. (2016). A general method for solving transient multidimensional inverse heat transfer problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93, 665–673.
7. Hao, M., & Sun, Y. (2013). A FEM model for simulating temperature field in coaxial laser cladding of Ti6Al4V alloy using an inverse modeling approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64, 352–360.
8. Wang, S., Deng, Y., & Sun, X. (2018). Solving of two-dimensional unsteady inverse heat conduction problems based on boundary element method and sequential function specification method. *Complexity*, 2018.
9. Monde, M. (2000). Analytical method in inverse heat transfer problem using Laplace transform technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
10. Huang, C. H., et al. (1999). A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
11. Zhou, J., et al. (2010). Inverse estimation of surface heating condition in a three-dimensional object using conjugate gradient method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
12. Burggraf, O. R. (1964). An exact solution of the inverse problems in heat conduction theory and application. *ASME Journal of Heat Transfer*.
13. Langford, D. (1976). New analytical solutions of the one-dimensional heat equation for temperature and heat flow rate both prescribed at the same fixed boundary (with applications to the phase change problem). *Quarterly of Applied Mathematics*.
14. Zhou, J., Zhang, Y., Chen, J. K., & Feng, Z. C. (2012). Inverse estimation of front surface temperature of a plate with laser heating and convection–radiation cooling. *International Journal of Thermal Sciences*, 52, 22–30.
15. Bozzoli, F., Mocerino, A., Rainieri, S., & Vocale, P. (2018). Inverse heat transfer modeling applied to the estimation of the apparent thermal conductivity of an intumescent fire-retardant paint. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 90.
16. Segall, A. E. (2005). An inverse solution for determining arbitrary boundary conditions using a least-square approach. *ASME Journal of Heat Transfer*.

17. Dong, C. F., Sun, F. Y., & Meng, B. Q. (2007). A method of fundamental solutions for inverse heat conduction problems in an anisotropic medium. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(1), 75–82.
18. Zhang, B., Mei, J., Cui, M., Gao, X.-W., & Zhang, Y. (2019). A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 140.
19. Katrych, V. O., Maiboroda, D. V., Poharskyi, S. O., Prosvirnin, S.L. (2011). *Chyselni metody v prykladnii fizytsi [Numerical methods in applied physics]*. Kharkivskyi natsionalnyi universytet imeni V. N. Karazina.
20. Meitlend A., Dann M. (1978). *Vvedennia u fizyku lazeriv [Introduction to laser physics]*. Nauka.
21. Schwarzenbach, A.P., Ladrach, P. (1995). Recent Progress in Laser Processing. *Proceedings of International Symposium for ElectroMachining, EPFL, Lausanne, Switzerland*.
22. Baiborodin, Yu. V. (1977). *Vvedennia v lazernu tekhniku [Introduction to laser technology]*. Tekhnika.
23. Ananov, Y. A. (1992). *Laser Resonators and the Beam Divergence Problem (Series on Optics and Optoelectronics)*. Taylor & Francis.
24. Shannon, R. (1997). *The Art and science of optical design*. Cambridge University Press.
25. Kozyriev, O. S., Kahliak, O. D., Chukhlib, S. V. (2024). Modeliuvannia protsesu nahrivannia pry lazernomu zghynanni [Modelling the heating process during laser bending]. *Kompleksne zabezpechennia yakosti tekhnolohichnykh protsesiv ta system: XIV mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii – Comprehensive Quality Assurance of Technological Processes and Systems: XIV International Scientific and Practical Conference* (Vol. 1, pp. 161-162).
26. Pretorius, T. (January 2009). Laser Forming. The Theory of Laser Materials Processing. Springer Series in Materials Science (pp. 281–314).
27. Vollertsen, F. (1994). An Analytical Model for Laser Bending. *Lasers in Engineering*, 2, 261-276.
28. Kozyriev, O. S., Lutsenko, D. V. (2021). Iteratsiyni pidkhid pry rozv'iazanni zvorotnoi zadachi teploprovodnosti [Iterative approach to solving the inverse heat conduction problem]. *KZlaTPS – 2021: XI Mizhnarodna naukovo-praktychna konferentsiia – KZlaTPS – 2021: XI International Scientific and Practical Conference* (Vol. 1, pp. 160–162).
29. Kozyriev, O. S., Kahliak, O. D., Rytikov, Ye. O. (2024). Zvorotna teplova zadacha pry lazernomu zghynanni [Reverse heat problem in laser bending]. *KZlaTPS – 2024: XIV mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii - KZlaTPS – 2024: XIV International Scientific and Practical Conference* (Vol. 1, pp. 159–161).
30. Kovalenko, B. C., Holovko, L. F., Chernenko, B. C. (1990). *Zmitsnennia ta lehuвання detalei mashyn promenem lazera [Hardening and alloying of machine parts with a laser beam]*. Tekhnika.

Дата першого надходження статті до видання: 05.12.2025
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 20.12.2025

UDC 621.326

**Oleksii Kozyriev¹, Oleksii Kaglyak², Maksym Romanenko³,
Viktor Dubnyuk⁴, Yuriy Klychnykov⁵**

¹Senior Lecturer of the Department of Laser Systems and Advanced Technologies
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Kyiv, Ukraine)
E-mail: kozyriev.oleksii@lli.kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5385-8578>

²PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Laser Systems and Advanced Technologies
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Kyiv, Ukraine)
E-mail: kaglyak.olexa@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5602-543X>

³PhD student of the Department of Laser Systems and Advanced Technologies
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Kyiv, Ukraine)
E-mail: m.romanenko@kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8803-2278>

⁴Senior Lecturer of the Department of Laser Systems and Advanced Technologies
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Kyiv, Ukraine)
E-mail: v.dubnyuk@kpi.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6146-9265>

⁵ PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Laser Systems and Advanced Technologies
National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» (Kyiv, Ukraine)
E-mail: yu.klyuchnikov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1970-6340>

MODELING OF LASER HEATING PROCESSES IN METALS BASED ON THERMAL FIELD ANALYSIS

In laser thermal processing, welding, cladding, surface hardening, and laser bending, it is the temperature fields that determine the development of phase transformations, the material's microstructure, and the formation of residual stresses and deformations. Proper design of these processes requires models capable of adequately reproducing the thermal behavior of metals. Modern trends in laser technologies — including additive manufacturing and precision processing — demand increased accuracy in mathematical modeling.

Formulating the inverse heat conduction problem (IHCP) with Neumann boundary conditions and nonlinear thermophysical properties in a 3-D configuration has been scarcely addressed, even though this type of boundary condition (prescribed heat flux on the surface) is inherent to laser heating problems. Therefore, there is a need to develop a numerical method for solving the inverse heat conduction problem based on thermal field analysis to determine the technological parameters of laser equipment required to achieve the desired output characteristics of material processing.

A numerical model is proposed that links the energy delivered by the laser beam, the material's thermophysical properties, and the heat-transfer conditions with the thermal action of the radiation. In addition, an inverse model is introduced that relates temperature-field parameters to the technological settings of the laser system. The proposed method for solving the inverse heat conduction problem makes it possible to control the solution accuracy, which generally depends on the quality of the direct model. The direct model presented here enables detailed representation of the interaction between laser radiation and the material and allows sufficiently accurate calculations, including for materials with nonlinear thermophysical properties.

The practical significance of the results lies in the model's capability to optimize laser-processing parameters: predicting optimal values of power, beam speed, and spot diameter to achieve the desired outcomes. The model has been applied to heating processes without surface phase transitions (laser surface treatment, laser forming), and thus its extension to other technologies — including welding and precision machining — can be considered. The research results may be used to optimize laser-processing parameters, improve the efficiency of technological processes, and enhance the quality of treated materials.

Keywords: laser heating; thermal conductivity; inverse heat conduction problem; numerical simulation; temperature field; laser heat treatment.

Fig. 4. Table 3. References: 30.