

**Олег Васильович Серета**

аспірант кафедри електроніки, автоматики, робототехніки та мехатроніки  
Національного університету «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)  
E-mail: [seredaolegv@gmail.com](mailto:seredaolegv@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2270-0385>  
Google Scholar: <https://scholar.google.com/citations?hl=ru&user=eP1b49cAAAAJ>

**ФАЗЗИ-РЕГУЛЯТОР У ЗОВНІШНЬОМУ КОНТУРІ СТАБІЛІЗАЦІЇ  
КРЕНУ КВАДРОКОПТЕРА**

У роботі запропоновано модифікований рекурсивний цифровий регулятор зовнішнього контуру стабілізації крену квадрокоптера, аналог [2], у якому адаптація динамічних властивостей здійснюється через фаззи-налаштування еквівалентного частотного параметра  $w_n$ . На кожному такті дискретизації фаззи-модуль типу Sugeno-0 формує поточне значення  $w_n$  на основі нормованої похибки кута та фільтрованого приросту похибки. Отриманий параметр використовується для параметричного синтезу коефіцієнтів чисельника цифрового регулятора та демпфувальної поправки за методом Акермана [3], тоді як знаменник рекурсивного закону залишається фіксованим. Така побудова дозволяє поєднати переваги рекурсивного цифрового керування [1; 2] з адаптивною зміною швидкодії та жорсткості реакції без структурного ускладнення контуру. Проведено моделювання синтезованої системи та моделювання [1] та [2] мовою програмування Python. Приведено порівняння характеристик.

**Ключові слова:** квадрокоптер; зовнішній контур; стабілізація крену; цифровий регулятор; фаззи-логіка; Sugeno-0; адаптація  $w_n$ ; метод Акермана; енергоефективність.

Рис.: 5. Табл.: 4. Бібл.: 16.

**Актуальність теми дослідження.** Постановка теми дослідження викликана необхідністю підвищення якості та енергоефективності в системах управління польотом безпілотних літальних апаратів (БПЛА), враховуючи роботи [1; 2], виникла задача удосконалити запропоновані методи.

**Постановка проблеми.** Системи автоматичного керування квадрокоптерами повинні забезпечувати одночасно швидке відпрацювання кутових команд, низьке перерегулювання, обмеження пікових навантажень на електромеханічний привід та помірні енергетичні витрати. Класичні цифрові регулятори з фіксованими коефіцієнтами дозволяють досягти високого рівня якості в оптимальних режимах роботи [1; 2], однак при різних режимах польоту часто виникає компроміс між швидкістю системи та енергоефективністю.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз доступних публікацій за темою дослідження показав, що в них не розкрито питанням використання адаптивних методів для збереження енергії акумулятора. Огляд сучасних робіт свідчить, що більшість досліджень у сфері стабілізації крену БПЛА зосереджена на підвищенні точності та швидкодії за рахунок складних нелінійних методів: адаптивного зворотного ступінчастого керування [7], режим ковзання зі змінним підсиленням [8], нейронних мереж та гібридних схем «нейромережа–фаззи» [9], а також каскадних моделей предикативного керування [10]. Питання ж адаптивного збереження енергії акумулятора безпосередньо в законі керування зовнішнього контуру крену практично не розглядалося. Роботи, що досліджують взаємозв'язок між агресивністю регулятора і витратою енергії двигунів квадрокоптера під час маневрів, нечисленні [11; 12]. У представлених роботах витрата енергії аналізується переважно ретроспективно, а не лягає в основу синтезу регулятора. Подібну прогалину відзначає і огляд [13], де зазначається, що переважна більшість алгоритмів керування БПЛА оцінюється виключно за показниками якості перехідного процесу, не включаючи явний критерій мінімізації витраченої електричної енергії під час маневру.

**Виділення недосліджених частин загальної проблеми.** При вирішенні задач оптимізації енергодинамічних процесів в системі електропривода квадрокоптера постало питання уніфікації системи керування електроприводом. При певних умовах роботи регулятора повністю задовольняє поставлені задачі, але система стає «негнучкою». Для розширення умов керування на часі треба вводить адаптивне керування, розширюючи

можливості стандартного цифрового адаптивного фільтра. Попри широке застосування фаззи-логіки для адаптивного налаштування коефіцієнтів ПД-регуляторів квадрокоптерів [7; 14; 15], використання фаззи-модуля типу Sugeno-0 безпосередньо для параметричного синтезу коефіцієнтів рекурсивного цифрового регулятора через узагальнений частотний параметр  $w_n$  залишається недослідженим.

**Мета дослідження** є розробка, математичне обґрунтування та чисельне дослідження, програмне моделювання модифікованого рекурсивного цифрового фаззи-регулятора контуру кута стабілізації крену квадрокоптера з адаптацією параметра  $w_n$ , включаючи аналіз показників якості та енергоефективності.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Перспективним шляхом для покращення властивостей систем керування є введення адаптації параметрів регулятора відповідно до поточного стану системи [3; 4]. У роботі запропоновано підхід, у якому адаптація системи керування здійснюється через зміну узагальненого частотного параметра  $w_n$ . Такий підхід є зручним з фізичної точки зору, оскільки  $w_n$  прямо пов'язаний із заданою швидкістю реакції системи [5]. Поточне значення  $w_n$  формується фаззи-регулятором типу Sugeno-0 [4] на основі нормованої похибки та її фільтрованого приросту, після чого за цим параметром виконується параметричний синтез коефіцієнтів чисельника рекурсивного закону та коефіцієнта демпфування. Знаменник регулятора залишається фіксованим, що забезпечує сталість базової структури алгоритму.

Рекурсивний цифровий фаззи-регулятор в контурі стабілізації крену квадрокоптера, працює за схемою послідовних етапів: оцінювання стану системи за  $e[k]$  та  $\Delta e_f[k]$ , фаззи-адаптацію параметра  $w_n(k)$  через модуль Sugeno-0 [4], параметричний синтез коефіцієнтів за методикою Акерманном [3] та формування рекурсивної керуючої дії.

Оцінювання стану системи визначається за наступним алгоритмом, на  $k$ -му кроці дискретизації похибка  $e[k]$  визначається як різниця між еталонним та вимірним кутом:

$$e[k] = a_{ref}[k] - a[k] \quad (1)$$

де:  $a_{ref}[k]$  – еталонний кут, рад;

$a[k]$  – вимірний кут, рад.

Приріст похибки  $\Delta e[k]$  задається різницею між поточним і попереднім значенням:

$$\Delta e[k] = e[k] - e[k - 1] \quad (2)$$

де:  $e[k]$  – поточне значення похибки;

$e[k - 1]$  – попереднє значення похибки.

Для зменшення чутливості до шумів вимірювання використовується фільтрація приросту похибки за рекурсивним законом першого порядку [4]:

$$\Delta e_f[k] = (1 - a_f) \cdot \Delta e[k] + a_f \cdot \Delta e_f[k - 1] \quad (3)$$

де:  $a_f \in [0,1]$  – коефіцієнт згладжування  $a_f$ ;

$\Delta e[k]$  – поточний приріст похибки;

$\Delta e_f[k - 1]$  – попереднє відфільтроване значення;

$\Delta e_f[k]$  – результат на поточному кроці.

Для забезпечення роботи фаззи-системи в діапазоні  $[-1,1]$  використовуються нормовані змінні,  $E_{max}$  та  $DE_{max}$ , виконують роль масштабуючих коефіцієнтів:

$$E[k] = \text{sat} \left( \frac{e[k]}{E_{max}}, -1, 1 \right). \quad (4)$$

$$DE_f[k] = \text{sat} \left( \frac{\Delta e_f[k]}{DE_{max}}, -1, 1 \right). \quad (5)$$

Масштабуючі коефіцієнти коригують максимальне значення похибки та кута. У цій задачі виконується значення  $E_{max} = 30^\circ$  (прийемо  $30^\circ$ , як типове значення), оператор  $sat(x, -1, 1)$  обмежує змінну в межах від  $-1$  до  $1$ .

Вибір моделі Sugeno-0 обґрунтований мінімізацією обчислювальної складності алгоритму за рахунок використання константних значень у базі правил, що є критичним для систем реального часу на базі мікроконтролерів. Застосування методу зваженого середнього при дефазифікації забезпечує диференційованість поверхні виводу та відсутність розривів керуючого сигналу, а математична структура моделі дозволяє виконати аналітичну перевірку умов стійкості системи в замкненому контурі [6]. Використовується фаззі-модуль типу Sugeno-0 [4; 6] з двома входами  $E[k]$  і  $DE_f[k]$ . Для кожного входу вводяться три терми:  $N$  (негативний),  $Z$  (нульовий),  $P$  (позитивний).

Таблиця 1 – Параметри трикутних функцій належності вхідних змінних  $E, DE_f \in [-1, 1]$

Терм	Мітка	a	b	c
Negative	N	-1,0	-0,5	0,0
Zero	Z	-0,5	0,0	0,5
Positive	P	0,0	0,5	1,0

Трикутна функція належності для вхідних змінних  $E$  та  $DE_f$ :

$$tri(x; a, b, c) = \max \left( \min \left( \frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right), \tag{6}$$

де  $a < b < c$  – параметри лівого, центрального та правого вершин трикутника.

Рисунок 1 ілюструє три компоненти фаззі-системи [4]: функції належності термів  $N, Z, P$ ; поверхню виводу  $s(E, DE_f), w_n[k]/w_{n_{base}}$  як функцію двох входів ( $E, DE_f$ ). Карта підтверджує логічну поведінку: у правому верхньому куті ( $E > 0, DE_f > 0$ )  $w_{n_{scale}} = 1,5$  (агресивне регулювання), у правому нижньому ( $E < 0, DE_f < 0$ , система наближається до заданого значення)  $w_{n_{scale}} = 0,7$  (ощадливе регулювання).

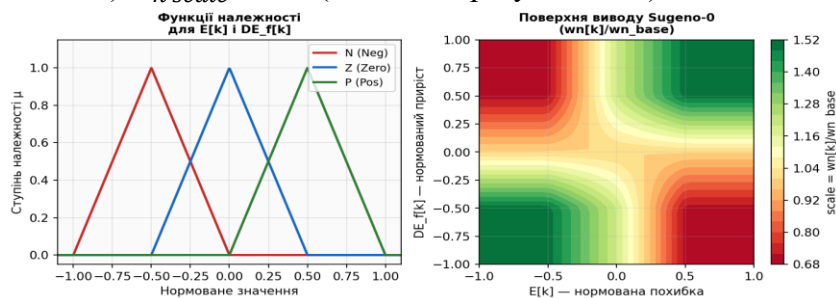


Рис. 1. Функції належності, поверхня виводу Sugeno-0

База правил Sugeno-0 задає таблицю масштабних множників  $w_n$  для базового параметра  $w_{n_{base}}$ . Таблиця 2 містить числові значення, де рядки відповідають термам  $E$ , а стовпці –  $DE_f$ :

Таблиця 2 – Масштабний множник для базового параметра  $w_{n_{base}}$

$E \setminus DE_f$	$DE = N$	$DE = Z$	$DE = P$
$E = N$	1,5	1,0	0,7
$E = Z$	1,2	1,0	1,2
$E = P$	0,7	1,0	1,5

Поточне значення частотного параметра визначається Sugeno-0-дефазифікацією:

$$w_n(k) = wn_{base} \cdot \frac{(\sum_i w_{ij}[k] \cdot s_{ij})}{\sum_i w_{ij}[k]}, \tag{7}$$

де  $w_{ij}[k] = \mu_{ij}$  – ваговий коефіцієнт  $i - j$ -го правила;

$s_{ij}$  – відповідний масштаб з табл. 2.

У формулі (7) слід урахувати особливий граничний випадок, який реалізується за  $E = \pm 1$ , граничний випадок, сума ступенів належності всіх трьох термів рівна 0. З метою усунення зазначеної невизначеності доцільно задати окреме граничне правило, при  $E = -1$  результат дефазифікації приймається рівним значенню, асоційованому з лівим крайнім термом, а при  $E = +1$  – значенню, асоційованому з правим крайнім термом. Відповідно, стандартний вираз дефазифікації використовується лише в межах інтервалу  $E \in (-1; 1)$ , тоді як на межах області визначення застосовується спеціально введене правило, що гарантує коректність чисельної реалізації.

На рис. 2 представлено тривимірні поверхні залежностей  $w_n[k]$  та  $\mu_0[k]$ , від пари входів  $(E, DE_f)$

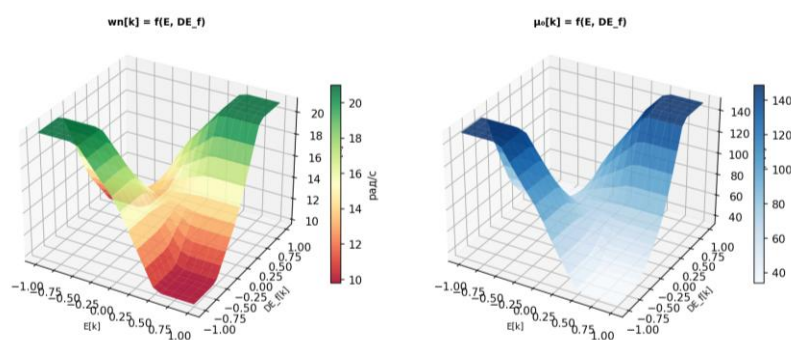


Рис. 2. 3D-поверхні  $w_n[k]$  та  $\mu_0[k]$

Після визначення поточного значення еквівалентного частотного параметра  $\omega_{n,eff}[k]$  виконується параметричний синтез коефіцієнтів адаптивного чисельника регулятора. Для цього використовується двовимірна модель каналу крену у просторі станів. Вектор стану вибираємо у вигляді

$$x[t] = [\alpha(t), \Omega(t)]^T, \tag{8}$$

де  $\alpha(t)$  – кут крену, рад;

$\Omega(t)$  – кутова швидкість квадрокоптера, рад/с.

Безперервна модель зовнішнього контуру має вигляд:

$$\dot{\alpha}(t) = \Omega(t), \quad \dot{\Omega}(t) = -kd \cdot \Omega(t) + B_a \cdot u(t), \tag{9}$$

або запишемо в матричній формі:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \tag{10}$$

де  $A = [[0, 1], [0, -kd]]$ ,  $B = [0, B_a]^T$ .

Для реалізації цифрового закону керування модель (10) дискретизується з періодом  $T = T_{pwm}$ . У результаті отримуємо дискретну систему:

$$x[k + 1] = A_d \cdot x[k] + B_d \cdot u[k], \tag{11}$$

де  $A_d = e^{AT}$ ;

$$B_d = \int_0^T e^{A\tau} \cdot B \cdot d\tau.$$

Для системи другого порядку матриця керуваності має вигляд:

$$M_c = [B_d, A_d \cdot B_d]. \tag{12}$$

Умова застосовності методу Акермана полягає в повному ранзі матриці  $M_c$ :  $rank(M|c) = 2$ . Бажані динамічні властивості задаються через  $\omega_{n,eff}[k]$  та коефіцієнт демпфування  $\zeta$ . Для безперервної моделі цільовий характеристичний поліном записується як:

$$p_c(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_{n,eff}[k] \cdot s + \omega_{n,eff}^2[k] \quad (13)$$

Після відображення бажаних полюсів у  $z$ -площину

$$z_{1,2}[k] = e^{s_{1,2} \cdot T} \quad (14)$$

де  $s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_{n,eff}[k] \pm j \cdot \omega_{n,eff}[k] \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Одержуємо дискретний цільовий поліном:

$$p_d(z) = (z - z_1[k]) \cdot (z - z_2[k]) = z^2 + a_1[k] \cdot z + a_0[k] \quad (15)$$

Тоді матриця бажаного полінома для методу Акермана задається як:

$$p_d(A_d) = A_d^2 + a_1[k] \cdot A_d + a_0[k] \cdot I \quad (16)$$

Вектор зворотного зв'язку за станом визначається формулою Акермана:

$$K[k] = [01]M_c^{-1}p_d(A_d), \quad (17)$$

де  $K[k] = [k_1[k] \ k_2[k]]$ .

Відповідно, закон керування набуває вигляду

$$u[k] = -K[k] \cdot x[k] = -k_1[k] \cdot \alpha[k] - k_2[k] \cdot \Omega[k] \quad (18)$$

Так як у роботі використовується рекурсивний цифровий регулятор зі зворотним зв'язком, параметри зворотного зв'язку далі приводяться до коефіцієнтів адаптивного чисельника. Для прийнятої структури регулятора:

$$u[k] = \mu_0[k] \cdot e[k] + \mu_1[k-1] \cdot e[k-1] + \mu_2[k-2] \cdot e[k-2] - \eta_1 \cdot u[k-1] - \eta_2 \cdot u[k-2] \quad (19)$$

коефіцієнти  $\mu_0[k]$ ,  $\mu_1[k]$ ,  $\mu_2[k]$  є функціями поточного значення  $\omega_{n,eff}[k]$ , а отже й функціями цільових дискретних полюсів  $z_1[k]$ ,  $z_2[k]$ . Алгоритм обчислення  $\mu_0[k]$ ,  $\mu_1[k]$ ,  $\mu_2[k]$  та  $k_a[k]$  виконується за формулами формули (23) – (27). Приведемо ідентифікацію показників:

$$\mu_0[k] = f_0(\omega_{n,eff}[k], \zeta, T, B_a, k_a); \quad (20)$$

$$\mu_1[k] = f_1(\omega_{n,eff}[k], \zeta, T, B_a, k_a); \quad (21)$$

$$\mu_2[k] = f_2(\omega_{n,eff}[k], \zeta, T, B_a, k_a). \quad (22)$$

Тобто при зміні  $\omega_{n,eff}[k]$ , сформованого фаззі-модулем, змінюються бажані полюси дискретної системи, а через зміну полюсів змінюються коефіцієнти адаптивного чисельника  $\mu_0[k]$ ,  $\mu_1[k]$ ,  $\mu_2[k]$ . Знаменник рекурсивного закону при цьому залишається фіксованим ( $\beta = 0.05$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ), що забезпечує сталість базової структури. Ототожнення  $k_1[k] \equiv \mu_0[k]$  та  $k_2[k] \equiv k_a[k]$  обґрунтовано формулою (27).

У запропонованому алгоритмі фаззі-модуль не змінює структуру регулятора, а лише адаптує параметр  $\omega_{n,eff}[k]$ , через який у кожний момент часу перебудовується бажаний поліном формула (15) і, відповідно, коефіцієнти  $\mu_0[k]$ ,  $\mu_1[k]$ ,  $\mu_2[k]$ . Це забезпечує компроміс між швидкодією, демпфуванням та енергоспоживанням у різних режимах маневру БПЛА.

Нижче наведено повний покроковий алгоритм, що показує перетворення від  $K[k] = [k_1, k_2]$ , у результаті отримаємо, рівняння (17) – (18) для коефіцієнтів цифрового регулятора  $\mu_0[k]$ ,  $\mu_1[k]$ ,  $\mu_2[k]$  та  $k_a[k]$  рівняння (20) – (22). Запишемо параметри системи:  $B_a = \frac{k_0 \cdot L_{ak} \cdot 2 \cdot \omega_{nos}}{I_{hoss}} = 2,7c^{-2}$ ,  $k_a = b_{hoss}/I_{hoss} = 1,0c^{-1}$ ,  $T = 0,005c$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\zeta = 0,9$ .

ZOH-дискретизація моделі платформи,  $A = [[0,1], [0, -k_a]]$ ,  $B = [0, B_a]^T$  матриці дискретної системи формула (11) мають вигляд:

$$A_a = \left[ \left[ 1, \frac{(1-e^{-k_a D})}{k_a} \right], [0, e^{-k_a D}] \right] B_a = \left[ \left[ B_a, \left( \frac{T}{k_a} + \frac{(e^{-k_a D}-1)}{k_a^2} \right) \right], \left[ B_a, \frac{(1-e^{-k_a D})}{k_a} \right] \right] \quad (23)$$

Розрахунок згідно з формулою (23) показує наступні значення:  $A_a = [[0, 0.004988], [0, 0.995012]]$ ,  $B_a = [[3.369 \cdot 10^{-5}], [1.347 \cdot 10^{-2}]]$ .

Перевірка керованості. Матриця  $M_0 = [B_a | A_a \cdot B_a]$ . Аналітично при  $k_a = 0$  (спрощена модель)  $\det(M_0) = -B_a^2 \cdot T^3$ , який відповідно  $\det(M_0) \neq 0$  для будь-яких  $B_a \neq 0$  та  $T \neq 0$ . Числово для точної ZOH-дискретизації ( $k_a = 1$ ), детермінант значить:

$$\det(M_0) = -9,067 \cdot 10^{-7} \neq 0; \text{rank}(M_0) = 2 \quad (24)$$

Бажані полюси та поліном  $p_a(z)$  для  $\omega_n[k] = 14$  рад/с (базовий приклад, для  $\zeta = 0,9$ ):  $\omega_d = \omega_n \sqrt{(1-\zeta^2)}$  розрахуємо значення  $\omega_d = 6,103$  рад/с, звідси:  $z_{1,2} = e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot T} \cdot (\cos(\omega_d \cdot T) \pm j \cdot \sin(\omega_d \cdot T)) = 0,9385 \pm j \cdot 0,0286$ , отримаємо результат  $|z_1| = 0,9389 < 1$ . Коефіцієнти полінома формула (15):  $a_1[k] = -2 \cdot R(z_1) = -1.8770$ ,  $a_0[k] = |z_1|^2 = 0.8816$ .

Обчислення  $K[k]$  за формулою Акерманна формула (17),  $p_a(A_a) = A_a^2 + a_1[k] \cdot A_a + a_0[k] \cdot I$ . Отримаємо результат:  $p_a(A_a)[2, 2] = 0.004013$ . Відповідно вектор  $K$ :

$$K = [0,1] \cdot M_0^{-1} \cdot p_a(A_a) \quad (25)$$

Отримаємо числові значення:  $K[k] = [k_1, k_2] = 68,35, 8,592$ .

Зв'язок  $K[k]$  з коефіцієнтами ПР-чисельника, перша компонента  $k_1[k]$  є прямим підсиленням по похибці ( $k_1 \equiv \mu_0$ ), друга  $k_2[k]$  – демпфувальним коефіцієнтом ( $k_2 \equiv k_a$ ). Щоб відобразити динаміку знаменника ( $\beta$ -фільтр), коефіцієнти  $\mu_1[k]$  та  $\mu_2[k]$  обчислюються через ПР-ваги  $k_{1f}$  та  $k_{2f}$ , що визначаються параметром  $\beta = 0.05$  та залишаються незмінними:

$$k_{1f} = \beta - 1 + e^{-\beta} / \beta^2, k_{2f} = (1 - e^{-\beta(1+\beta)}) / \beta^2; \quad (26)$$

$$\mu_0[k] = k_1[k], \mu_1[k] = k_{1f} \cdot \mu_0[k], \mu_2[k] = e^{-\beta} \cdot k_{2f} \cdot \mu_0[k], k_a[k] = k_2[k]. \quad (27)$$

Формула (27) задає правило обчислення коефіцієнтів адаптивного чисельника на поточному кроці  $k$ . У рекурсивному законі керування ці коефіцієнти використовуються з урахуванням часових індексів:  $\mu_0[k]$  множиться на  $e[k]$ , тоді як коефіцієнти при  $e[k-1]$  та  $e[k-2]$  повинні відповідати тим тактам, на яких вони були сформовані. Отже, при змінних коефіцієнтах реалізація закону керування потребує збереження попередніх значень  $\mu_1[k]$  та  $\mu_2[k]$ . Розрахунок для  $k_{1f}$  та  $k_{2f}$ , становить  $k_{1f} = 0,49177$ ,  $k_{2f} = 0,48364$ . Таблиця 3 наводить числові значення коефіцієнтів для чотирьох характерних масштабів  $w_{n\ scale} \in \{0.7, 1.0, 1.2, 1.5\}$ , отриманих за формулами (23) – (27) при  $w_{n\ base} = 14$  рад/с.

Таблиця 3 – Значення  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, k_a$  для чотирьох масштабів  $w_n$  ( $w_{n\ base} = 14$  рад/с,  $\zeta = 0,9, \beta = 0,05, T = 0,005$  с)

scale	$w_n$ (рад/с)	$\mu_0[k]$	$\mu_1[k]$	$\mu_2[k]$	$k_a[k]$
0,7	9,8	34,13	16,78	15,70	5,984
1,0	14,0	68,35	33,61	31,44	8,592
1,2	16,8	97,20	47,80	44,72	10,293
1,5	21,0	149,06	73,30	68,58	12,790

Формули (23) – (27) та табл. 3 замикають ланцюг синтезу для спрощеної моделі: фаззі-модуль формує  $w_n[k]$ , перетворення дають  $K[k] = [\mu_0, k_a]$ , формула (27) перетворює  $\mu_0 \rightarrow \mu_1, \mu_2$  через незмінні ваги  $k_{1f}, k_{2f}$ . Потрібно врахувати важливе зауваження:

спрощена модель  $k_d = 0$  дає похибку  $\mu_0$  не більше 0.25 %,  $k_a$  не більше ніж 4,05 %, що обґрунтовує її застосування ( $b_{roll} \cdot T = 0,005 < 1$ ).

Знаменник рекурсивного цифрового закону зберігається фіксованим і визначається параметром  $\beta = 0.05$ . Коефіцієнти  $\eta_1$  та  $\eta_2$  обчислюється один раз під час ініціалізації:

$$\eta_1 = \frac{(b_1 + b_2)}{(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)}, \quad \eta_2 = \frac{b_0}{(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)}, \quad (28)$$

де  $b_0, b_1, b_2$  – коефіцієнти дедбіт-полінома відповідно до параметра  $\beta$ .

Внутрішня рекурсивна змінна регулятора:

$$DU[k] = e[k] - \eta_1 \cdot DU[k - 1] + \eta_2 \cdot DU[k - 2], \quad (29)$$

де  $DU[k]$  – поточне вихідне значення,  $e[k]$  – вхідний сигнал,  $DU[k - 1]$ ,  $DU[k - 2]$  – значення, які були розраховані на попередньому та позаминулому кроках. Ця частина структури не адаптується в часі, що стабілізує форму цифрового закону та зменшує обчислювальну складність реального впровадження.

Керуюче коригування до швидкості двигунів у каналі крену:

$$\Delta\omega[k] = \mu_0[k] \cdot DU[k] + \mu_1[k] \cdot DU[k - 1] + \mu_2[k] \cdot DU[k - 2] - k_a[k] \cdot \Omega[k], \quad (30)$$

де  $\Omega[k]$  – поточна кутова швидкість крену, рад/с,  $\mu_0, \mu_1, \mu_2$  – коефіцієнти.

З урахуванням фізичних обмежень частоти обертання ротора вводиться поняття насичення:

$$\Delta\omega_{sat}[k] = sat(\Delta\omega[k], -\Delta\omega_{sat}, \Delta\omega_{sat}). \quad (31)$$

Опорна швидкість роторів двигунів, з урахуванням формула (30) та формула (31) визначається як:

$$\omega_{ref}[k] = max(\omega_{min}, \omega_{base}[k] + \Delta\omega_{sat}). \quad (32)$$

Замкнена система цифрового фаззи-регулятора зовнішнього контуру формує опорну швидкість  $\omega_{ref}[k]$ , внутрішні контури швидкості і струму з дедбіт-налаштуванням за Ципкіним [1; 2] перетворюють це завдання на напругу ШІМ-інвертора. Модель БДПС та платформи визначає динамічну відповідь системи. Зворотний зв'язок здійснюється через вимірювання кута  $\alpha[k]$  та кутової швидкості  $\Omega[k]$  платформи. Модель БДПС описується рівняннями електричного кола та механіки ротора:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} = U(t) - K_e \cdot \omega(t) - R \cdot I(t), \quad J \cdot \frac{d\omega}{dt} = K_t \cdot I(t) - c_1 \cdot \omega^2(t), \quad (33)$$

де прийняті значення для моделювання на  $L = 0.3$  мГн,  $R = 0.150$  Ом,  $K_e = K_t = 0.0118$  Н · м/А,  $J = 1.0 \cdot 10^{-4}$  кг · м<sup>2</sup>,  $c_1 = 1.5 \cdot 10^{-7}$  Н · м · с<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup> – коефіцієнт аеродинамічного опору пропелера. Одноосьова модель крену платформи має наступний вигляд:

$$I_{roll} \cdot \frac{d\Omega}{dt} = k_T \cdot L_{arm} \cdot (\omega^2 - \omega_{hov}^2) - b_{roll} \cdot \Omega, \quad (34)$$

де  $I_{roll} = 5 \cdot 10^{-3}$  кг · м<sup>2</sup> – момент інерції,  $b_{roll} = 5 \cdot 10^{-3}$  Н · м · с/рад – аеродинамічне демпфування.

Для чисельного розв'язку нелінійних рівнянь (33) – (34) використовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Для стану  $x(t) = [I(t), \omega(t), \alpha(t), \Omega(t)]^T$  вектор оновлення за крок  $dt$  записується:

$$k_1 = f(x_n); k_2 = f(x_n + 0.5 \cdot dt \cdot k_1); \dots; x_{n+1} = x_n + (dt/6) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (35)$$

Крок інтегрування  $dt = 50$  мкс обрано в 40 разів менше за електромагнітну постійну часу  $T_e = \frac{L}{R} = 2$  мс, що забезпечує 40 кроків на кожен такт ШІМ ( $T_{pwm} = 5$  мс =  $100 \cdot dt$ ). Це відповідає вимозі стабільності RK4 для системи жорсткістю  $s = T_{pwm}/T_e \approx 500$ .

Стійкість системи, хоча адаптивна зміна  $w_n[k]$  робить систему нестационарною, стійкість можна оцінити через два еквівалентні підходи: полюсний аналіз для замороженого  $w_n$  та аналіз граничних значень адаптації. Якщо при кожному фіксованому значенні  $w_n$  замкнена система асимптотично стійка, а зміна  $w_n$  між тактами обмежена, відповідно нестационарна система зберігає стійкість.

Функція передачі замкненого контуру при фіксованому  $w_n = w_n[k]$  має характеристичний поліном:

$$\Delta(z) = z^2 + p_1[k] \cdot z + p_2[k] = 0, \tag{36}$$

де  $p_1[k] = -2 \cdot e^{(-\zeta \cdot w_n[k] \cdot T) \cdot \cos(\omega_d[k] \cdot T)}$ ,  $p_2[k] = e^{(-2 \cdot \zeta \cdot w_n[k] \cdot T)}$ . Обидва корені  $z_1, z_2$  лежать всередині одиничного кола Z-площини для будь-якого значення  $w_n[k] > 0$  та  $\zeta > 0$ , оскільки  $|z|^2 p_2[k] = e^{(-2 \cdot \zeta \cdot w_n[k] \cdot T)} < 1$ . Для будь-яких  $\zeta > 0$ ,  $w_n > 0$ . Числове значення ( $\zeta = 0.9$ ,  $T = 0.005$  с):

$$w_n = 9.8 \text{ рад/с: } z_1 = 0,9566 + j0,0204, |z_1| = 0,9569 < 1;$$

$$w_n = 21 \text{ рад/с: } z_1 = 0,9089 + j0,0416, |z_1| = 0,9098 < 1.$$

Обмеження  $\Delta w_n$  – максимальна зміна  $w_n$  за один такт:  $w_{n \max} = 21,0 - 9,8 = 11,2$  рад/с. Відповідна зміна  $|z|$ :  $\Delta|z| = 0,9098 - 0,9569 = -0,047$  (менше 5 % від радіуса кола). Усі полюси залишаються в одиничному колі – система стійка [3].

Частотне дискретування, критерій [5]:  $w_n[k] \cdot T < \pi/2 \approx 1.57$ . Для  $w_{n \max}$ :  $21,0 \cdot 0,005 = 0,105 < 1.57$  – запас 15x. Таким чином виконано три умови: система стійка в діапазоні  $w_n \in [9,8; 21,0]$  рад/с при  $\zeta = 0.9$ ,  $T = 0.005$  с.

На рис. 3 наведено перехідний процес для ступінчастої зміни кута крену  $0^\circ - 10^\circ$ . Виконано моделювання системи керування квадрокоптера за допомогою мови програмування Python. Представлені значення для регулятора, реалізація структури [1] за допомогою алгоритму Акермана, а також реалізація цифрового фільтра [2]. Як видно з графіка, найменший час встановлення  $t_s$  має реалізація цифрового фільтра [2] ( $t_s \approx 2,52 T$ , еталон  $3 T$ ). Результат цифрового адаптивного фаззи контролера показав значення  $t_s \approx 3,38 T$ . Однак при цьому має значно вищу якість перегулювання 0,15 % проти 0,72 % у цифрового фільтра [2] та меншій витраті енергії для перегулювання. Таблиця 4 підсумовує числові результати.

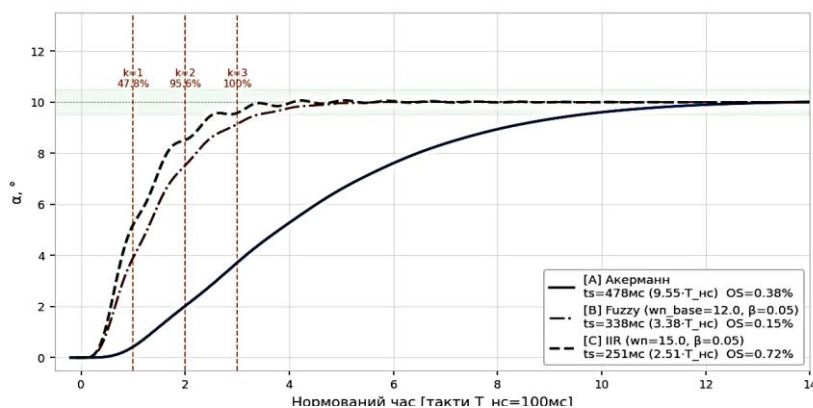


Рис. 3. Перехідний процес фаззи-регулятора, ступінчаста зміна  $0^\circ - 10^\circ$

Таблиця 4 – Порівняння регуляторів, маневр  $0^\circ - 10^\circ$

Показник	Реалізація алгоритму [1]	Фаззи регулятор	Цифровий фільтр [2]	Задане значення
Такти, $t_s$	9,56	3,38	2,52	$\leq 3,0$
Перерегулювання, %	0,38	0,15	0,72	$< 5$
$E_{ман}$ , Дж	0,166	0,620	1,693	мін.
Максимальний струм $I_{max}$ , А	2,1	7,2	11,8	$< 15$

На рис. 4 та рис. 5 продемонстровано роботу регулятора для шести режимів: малих і великих ступінчастих змін, реверсів. З діаграм на рисунків видно, що при перерегулюванні, синтезований регулятор має більший  $t_s$  порівняно з реалізацією регулятора на основі [2], але  $E_{man}$  у 2,7 раза менше, ніж реалізація регулятора на основі [2] (0,620 Дж проти 1,693 Дж). Детальне числове порівняння – табл. 4.

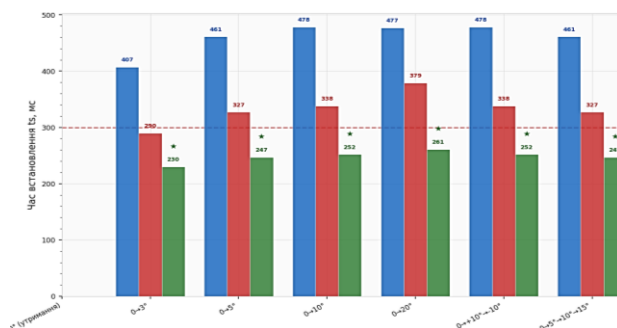


Рис. 4. Затрати часу для перерегулювання, вказано шість режимів маневру

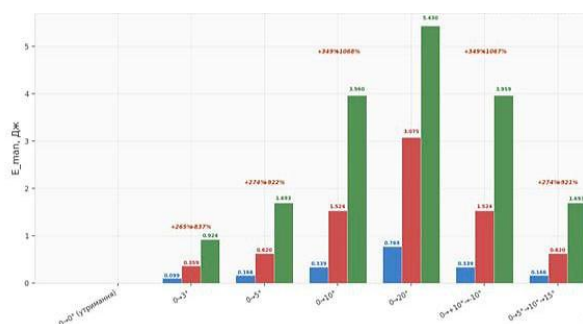


Рис. 5. Затрати енергії для перерегулювання, вказано шість режимів маневру

Для визначення енергоефективності використано поняття “витрати енергії” – це кількість енергії яка витрачається на відхилення від стаціонарного режимі “режим зависання”, електрична енергія маневру  $E_{man}$ :

$$E_{man} = \int_0^T \max(0, |U(t)| \cdot I(t) - P_{hover}) dt, \tag{37}$$

де  $U(t), I(t)$  – напруга та струм БДПС (крок  $dt = 50$  мкс);

$P_{hover}$  – потужність яка витрачається на утримання у стаціонарному режимі. розраховується наступним чином  $P_{hover} = U_{eq} \cdot I_{eq} \approx 4.25$  Вт.

**Висновки.** У роботі розроблено модифікований рекурсивний цифровий фаззі-регулятор зовнішнього контуру стабілізації крену квадрокоптера. Його особливістю є те, що фаззі-модуль Sugeno-0 [4] адаптує узагальнений частотний параметр  $w_n$ , який надалі використовується для параметричного синтезу коефіцієнтів чисельника та демпфувальної складової за методом Акермана [3]. Знаменник рекурсивного закону залишається незмінним, що забезпечує стабільну базову структуру алгоритму.

Запропонований підхід поєднує адаптивність фаззі-логіки [4] зі структурною простотою рекурсивного цифрового закону: знаменник фіксований, чисельник адаптується через параметричний синтез [3].

За даними табл. 4 (тестування на виконання маневру перерегулювання  $0^\circ \rightarrow 10^\circ$ ) система побудована на основі модифікованого рекурсивного цифрового фаззі-регулятора має показники перерегулювання:  $0,15\% < 1\%$ ,  $t_s = 3,38$  Т. Відносно реалізації регулятора на основі [2]  $t_s = 2,52$  Т  $< 3$  Т, OS = 0,72 %. Перевага рекурсивного цифрового фаззі-регулятора найменше перерегулювання, але час встановлення гірший ( $t_s \leq 3,5$  Т). Перевага реалізації регулятора на основі [2] – найменший час встановлення  $t_s$ . Для маневрів до  $20^\circ$  аналогічна

тенденція підтверджується діаграмами на рис. 4. Що показують високу швидкодію, але не задовольняє умову, проте показує досить високий показник якості перегулювання.

Фаззі-адаптація  $w_n$  знижує енергію маневру  $E_{man}$ , рівняння (37), в порівнянні з реалізацією цифрового фільтру [2]. У тесті перегулювання  $0^\circ - 10^\circ$   $E_{man} = 0.620$  Дж проти  $E_{man} = 1.693$  Дж – затрачено на 63 % менше енергії. Порівняно з реалізацією системи керування [1] (0.166 Дж) рекурсивний цифровий фаззі-регулятор витрачає більше енергії через вищу агресивність у фазі розгону, однак у 2,7 раза менше ніж реалізацією цифрового фільтру [2]. Загальну діаграму по шести режимах показано на рисунку 5.

Згідно з показниками якості перегулювання та затраченої енергії система побудована на основі модифікованого рекурсивного цифрового фаззі-регулятора зберігає баланс між швидкодією та енергозбереженням. Проте дає підґрунтя для подальших досліджень в цьому напрямку.

Алгоритм придатний для дискретної реалізації у вбудованих системах керування квадрокоптерами [2].

### **Заява про використання генеративного ШІ та технологій на основі ШІ в процесі написання тексту статті.**

Під час написання цього матеріалу автор використовував Claude (Anthropic) для допомоги у структуруванні та оформленні тексту статті. Після використання цього інструменту автор переглянув та відредагував зміст за потреби і взяв на себе повну відповідальність за зміст публікації.

### **Список використаних джерел**

1. Денисов, Ю. О., Шаповалов, О. М., Серeda, О. В., & Куц, Е. (2018). Оптимізація енергодинамічних процесів у системі керування приводом стабілізації польоту безпілотного літального апарата. *Технічні науки та технології*, (3(13)), 187–193.
2. Денисов, Ю. О., Городній, О. М., & Серeda, О. В. (2019). Синтез регулятора контуру кута крену системи управління квадрокоптера з компенсуючим регулятором контуру струму. *Технічні науки та технології*, (4(18)), 169–174.
3. Ackermann, J. (1993). *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer.
4. Passino, K., & Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy control*. Addison-Wesley.
5. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.
6. Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1), 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>.
7. Hassani, V., Tjahjowidodo, T., & Do, T. N. (2024). Performance evaluation of control strategies for autonomous quadrotors: A review. *Complexity*, 2024, 8820378. <https://doi.org/10.1155/2024/8820378>.
8. Ghasemi, A., & Azimi, M. M. (2023). Adaptive fuzzy PID control based on nonlinear disturbance observer for quadrotor. *Journal of Vibration and Control*, 29(7–8), 1952–1966. <https://doi.org/10.1177/10775463221089734>.
9. Tran, V. P., Mabrok, M. A., Garratt, M. A., & Petersen, I. R. (2021). Hybrid adaptive negative imaginary–neural–fuzzy control with model identification for a quadrotor. *IFAC Journal of Systems and Control*, 16, 100156. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2021.100156>.
10. Okulski, M., & Lawrynczuk, M. (2022). How much energy do we need to fly with greater agility? Energy consumption and performance of an attitude stabilization controller in a quadcopter drone: A modified MPC vs. PID. *Applied Sciences*, 12(18), 9390. <https://doi.org/10.3390/app12189390>.
11. Wang, Y., Wang, Y., & Ren, B. (2022). Energy saving quadrotor control for field inspections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(3), 1768–1777. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3034968>.
12. Strbac, B., Cavar, I., & Jakus, D. (2022). Quadrotor model for energy consumption analysis. *Energies*, 15(19), 7136. <https://doi.org/10.3390/en15197136>.
13. Idrissi, M., Salami, M., & Annaz, F. (2022). A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 104(1), 22. <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01527-7>.

14. Melo, A. G., Andrade, F. A. A., Guedes, I. P., Carvalho, G. F. C., Zachi, A. R. L., & Pinto, M. F. (2022). Fuzzy gain-scheduling PID for UAV position and altitude controllers. *Sensors*, 22(6), 2173. <https://doi.org/10.3390/s22062173>.

15. Nordeen, A., Mohd Basri, M. A., & Mohamed, Z. (2023). Real-time implementation of an adaptive PID controller for the quadrotor MAV embedded flight control system. *Aerospace*, 10(1), 59. <https://doi.org/10.3390/aerospace10010059>.

16. Shen, S., Xu, J., & Xia, Q. (2022). A fuzzy backstepping attitude control based on an extended state observer for a tilt-rotor UAV. *Aerospace*, 9(11), 724. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110724>.

### References

1. Denysov, Yu. O., Shapovalov, O. M., Sereda, O. V., & Kuts, E. (2018). Optymizatsiia enerhodynamichnykh protsesiv u systemi keruvannia pryvodom stabilizatsii polotu bezpilotnoho litalnoho aparata [Optimization of energy-dynamic processes in the control system of the flight stabilization drive of an unmanned aerial vehicle]. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii – Technical Sciences and Technologies*, (3(13)), 187–193.

2. Denysov, Yu. O., Horodnii, O. M., & Sereda, O. V. (2019). Syntez rehulatora konturu kuta krenu systemy upravlinnia kvadroptera z kompensuiuchym rehulatorom konturu strumu [Synthesis of the roll-angle loop controller of a quadcopter control system with a compensating current-loop controller]. *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii – Technical Sciences and Technologies*, (4(18)), 169–174.

3. Ackermann, J. (1993). *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer.

4. Passino, K., & Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy control*. Addison-Wesley.

5. Ogata, K. (2010). *Modern control engineering* (5th ed.). Prentice Hall.

6. Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, SMC-15(1), 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>.

7. Hassani, V., Tjahjowidodo, T., & Do, T. N. (2024). Performance evaluation of control strategies for autonomous quadrotors: A review. *Complexity*, 2024, 8820378. <https://doi.org/10.1155/2024/8820378>.

8. Ghasemi, A., & Azimi, M. M. (2023). Adaptive fuzzy PID control based on nonlinear disturbance observer for quadrotor. *Journal of Vibration and Control*, 29(7–8), 1952–1966. <https://doi.org/10.1177/10775463221089734>.

9. Tran, V. P., Mabrok, M. A., Garratt, M. A., & Petersen, I. R. (2021). Hybrid adaptive negative imaginary–neural–fuzzy control with model identification for a quadrotor. *IFAC Journal of Systems and Control*, 16, 100156. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2021.100156>.

10. Okulski, M., & Lawrynczuk, M. (2022). How much energy do we need to fly with greater agility? Energy consumption and performance of an attitude stabilization controller in a quadcopter drone: A modified MPC vs. PID. *Applied Sciences*, 12(18), 9390. <https://doi.org/10.3390/app12189390>.

11. Wang, Y., Wang, Y., & Ren, B. (2022). Energy saving quadrotor control for field inspections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(3), 1768–1777. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3034968>.

12. Strbac, B., Cavar, I., & Jakus, D. (2022). Quadrotor model for energy consumption analysis. *Energies*, 15(19), 7136. <https://doi.org/10.3390/en15197136>.

13. Idrissi, M., Salami, M., & Annaz, F. (2022). A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 104(1), 22. <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01527-7>.

14. Melo, A. G., Andrade, F. A. A., Guedes, I. P., Carvalho, G. F. C., Zachi, A. R. L., & Pinto, M. F. (2022). Fuzzy gain-scheduling PID for UAV position and altitude controllers. *Sensors*, 22(6), 2173. <https://doi.org/10.3390/s22062173>.

15. Nordeen, A., Mohd Basri, M. A., & Mohamed, Z. (2023). Real-time implementation of an adaptive PID controller for the quadrotor MAV embedded flight control system. *Aerospace*, 10(1), 59. <https://doi.org/10.3390/aerospace10010059>.

16. Shen, S., Xu, J., & Xia, Q. (2022). A fuzzy backstepping attitude control based on an extended state observer for a tilt-rotor UAV. *Aerospace*, 9(11), 724. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110724>.

Дата першого надходження статті до видання: 19.12.2025  
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 16.01.2026

**Oleh Sereda**

PhD Student of the Department of Electronics, Automation, Robotics and Mechatronics  
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

E-mail: [seredaolegv@gmail.com](mailto:seredaolegv@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2270-0385>

Google Scholar: <https://scholar.google.com/citations?hl=ru&user=eP1b49cAAAAJ>

## RECURSIVE DIGITAL FUZZY CONTROLLER WITH FREQUENCY- PARAMETER ADAPTATION IN THE OUTER ROLL STABILIZATION LOOP OF A QUADCOPTER

*This paper presents a modified recursive digital fuzzy controller for the outer roll stabilization loop of a quadcopter. In contrast to the conventional recursive digital controller, the proposed approach provides adaptive adjustment of the dynamic response through fuzzy tuning of the equivalent frequency parameter  $w_n$ . At each sampling instant, the current value of  $w_n$  is generated by a Sugeno-0 fuzzy inference module using the normalized roll-angle error and the filtered error increment as input variables. The obtained value is further employed for the parametric synthesis of the numerator coefficients of the digital controller and for damping correction based on Ackermann's method, while the denominator of the recursive control law remains unchanged. This structure ensures adaptive variation of response speed and rigidity without increasing the structural complexity of the control loop. The proposed system was modeled in Python and compared with the approaches described in [1] and [2]. The comparative results confirm the efficiency of the developed controller and demonstrate its applicability to quadcopter roll stabilization problems.*

**Keywords:** quadcopter; outer loop; roll stabilization; digital controller; fuzzy logic; Sugeno-0; adaptation of  $w_n$ ; Ackermann's method; energy efficiency.

Fig.: 5. Table: 4. References: 16.