

**Антон Євгенович Грановський¹, Володимир Миколайович Левченко²,
Віталій Юрійович Станков³, Олег Євгенійович Марков⁴**

¹аспірант кафедри обробки металів тиском,

Донбаська державна машинобудівна академія (Краматорськ-Тернопіль, Україна)

E-mail: anton.hranovskyi@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0006-1657-2232>

²кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник відділу поширення радіохвиль у природних середовищах, Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова Національної академії наук України (Харків, Україна)

E-mail: goldangel271@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-2411-4198>

³аспірант кафедри автоматизації виробничих процесів

Донбаська державна машинобудівна академія (Краматорськ-Тернопіль, Україна)

E-mail: stankov.vitali.78@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-2126-9623>

⁴доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації виробничих процесів

Донбаська державна машинобудівна академія (Краматорськ-Тернопіль, Україна)

E-mail: oleg.markov.umd@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9377-9866>

ResearcherID: [L-6561-2018](https://orcid.org/0000-0001-9377-9866). **Scopus Author ID:** [55648046800](https://orcid.org/0000-0001-9377-9866)

РОЗРАХУНОК ПРИВЕДЕНОГО ТИСКУ ПРЯМОГО ВИДАВЛЮВАННЯ ДЕТАЛЕЙ З КОНІЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ЕНЕРГЕТИЧНИМ МЕТОДОМ БАЛАНСУ ПОТУЖНОСТЕЙ

Побудовано розрахункову схему прямого видавлювання деталей з конічною порожниною на основі енергетичного методу балансу потужностей. Для трьох кінематично-елементарних зон визначено кінематично можливі поля швидкостей, інтенсивності швидкостей деформації та складові потужностей. Для зони формоутворення порівняно верхню оцінку потужності сил пластичного деформування за нерівністю Коші–Буняковського та лінеаризовану оцінку. Показано, що частка зсувної складової становить 0,3...11 %, а лінеаризований варіант забезпечує меншу середню абсолютну похибку визначення сили порівняно з методом скінченних елементів: 6,4 % проти 23,8 % для оцінки Коші–Буняковського. Отримані залежності можуть бути використані для інженерного оцінювання силового режиму процесу.

Ключові слова: енергетичний метод балансу потужностей; кінематично можливе поле швидкостей; приведений тиск; силовий режим; нерівність Коші–Буняковського; лінеаризована оцінка; метод скінченних елементів; холодне об'ємне штампування.

Рис.: 7. Табл.: 2. Бібл.: 20.

Актуальність теми дослідження. Деталі з конічними порожнинами та похилими внутрішніми і зовнішніми поверхнями становлять практичний інтерес для процесів холодного об'ємного штампування. Їх виготовлення пов'язане з одночасним забезпеченням точності форми, якості поверхні, стабільності формоутворення та допустимого рівня силового навантаження на інструмент [1–5]. Наявність конічної ділянки змінює характер течії матеріалу в осередку деформації, впливає на локалізацію деформацій і може істотно підвищувати приведений тиск та силу видавлювання [2–7].

Для попереднього проєктування таких процесів важливо мати аналітичні залежності, які дозволяють оцінити силовий режим без повного чисельного моделювання для кожної нової геометрії заготовки й інструмента [1; 7–9]. Це особливо важливо для холодного видавлювання, де високі питомі навантаження впливають не лише на вибір технологічного обладнання, а й на міцність і ресурс інструменту [1; 8].

Постановка проблеми. Одним із підходів до аналітичного оцінювання силового режиму є енергетичний метод балансу потужностей (ЕМБП), у межах якого осередок деформації розглядається як сукупність кінематично-елементарних зон із заданими кінематично можливими полями швидкостей [1; 8; 10–15]. Такий підхід дає можливість пов'язати геометрію процесу, умови тертя, швидкісне поле та потужності внутрішніх сил із приведеним тиском деформування.

Для процесу прямого видавлювання деталей з конічною порожниною найскладнішою є зона, безпосередньо пов'язана з формоутворенням похилої внутрішньої поверхні. Для цієї зони лінійні та зсувна компоненти тензора швидкостей деформації мають скла-

дні залежності, а їх поєднання під коренем у виразі інтенсивності швидкостей деформації ускладнює отримання компактною аналітичною залежністю для потужності сил пластичного деформування [10; 11]. Тому виникає потреба в побудові аналітичної розрахункової схеми прямого видавлювання деталей з конічною порожниною на основі ЕМБП та у порівнянні різних способів оцінювання потужності деформування в зоні формоутворення: верхньої оцінки за нерівністю Коші–Буняковського й лінеаризованої оцінки інтенсивності швидкостей деформації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасних дослідженнях процесів холодного видавлювання значну увагу приділено аналізу силового режиму, напружено-деформованого стану, контактних умов і впливу геометрії інструмента на формоутворення суцільних та порожнистих деталей [1–6; 12; 14; 15]. Такі роботи формують основу для оцінювання технологічних можливостей процесу, однак зазвичай розглядають або конкретні чисельні постановки, або окремі аналітичні схеми, що не завжди можуть бути безпосередньо використані для деталей з конічною порожниною.

Конічна геометрія достатньо широко представлена в дослідженнях пластичного формоутворення. Значна частина робіт стосується конічних і конічно-циліндричних чашок, оболонки, тонкостінних деталей та процесів їх отримання, зокрема витягування, обтискання, ротаційного формування та формоутворення з використанням еластичного або рідинного середовища [16–20]. Такі дослідження підтверджують практичну значущість конічних деталей як класу виробів, однак не завжди можуть бути безпосередньо перенесені на процеси холодного об'ємного видавлювання, для яких характер течії матеріалу, контактні умови та рівень силового навантаження істотно відрізняються.

Для деталей з конічною порожниною та порожнистих деталей з похилими внутрішніми поверхнями природним технологічним напрямом є саме видавлювання. У роботах, присвячених прямим, зворотним і комбінованим схемам видавлювання таких деталей, показано істотний вплив радіуса пуансона або протипуансона, кута нахилу конічної поверхні, висоти стінки, форми вихідної заготовки та умов контактної тертя на силовий режим і якість формоутворення [2–6]. Разом із тим значна частина таких досліджень має прикладний або чисельно-експериментальний характер: поле течії матеріалу визначається за результатами моделювання методом скінченних елементів (МСЕ), а отримані висновки часто прив'язані до конкретної геометрії інструмента та заготовки [2, 3, 6].

Окремий напрям становлять розрахунково-аналітичні методи оцінювання силового режиму процесів видавлювання, зокрема метод верхньої оцінки (МВО), енергетичний метод балансу потужностей та метод кінематичних модулів дають змогу отримувати інженерні залежності для приведеного тиску з використанням геометричних параметрів, полів швидкостей, потужностей пластичного деформування, тертя та зрізу [1; 7–15]. Такі підходи є особливо корисними на етапі попереднього проєктування, коли необхідно швидко оцінити вплив зміни геометрії або умов тертя без виконання повного розрахунку МСЕ для кожного варіанта.

У попередніх дослідженнях для прямого видавлювання деталей з конічною порожниною було побудовано параметричну схему на основі МВО, у якій осередок деформування подано системою жорстких трикутних елементів, а приведений тиск записано як суму внесків окремих ділянок осередку деформації [7]. Така модель дала змогу оцінити вплив геометрії конічної порожнини, коефіцієнта тертя та параметрів розбиття на силовий режим у межах оптимізованої кінематичної схеми. Разом із тим отримане рішення пов'язане з прийнятою системою жорстких елементів, побудованим годографом швидкостей та оптимізованими параметрами розбиття. Тому при зміні структури осередку деформації або переході до інших геометричних обмежень така схема потребує перебудови. ЕМБП дає змогу розглянути той самий процес в іншій аналітичній постановці – через

кінематично можливі поля швидкостей у суцільних кінематично-елементарних зонах та інтегральне визначення складових потужностей. Це зумовлює доцільність окремого розгляду процесу за енергетичним методом балансу потужностей, оскільки різні аналітичні постановки можуть давати різні кількісні оцінки силового режиму й потребують перевірки шляхом порівняння з результатами МСЕ.

Розвиток ЕМБП у задачах холодного видавлювання пов'язаний із побудовою кінематично можливих полів швидкостей (КМПШ), які задовольняють кінематичним граничним умовам, умові нестисненості матеріалу та умовам узгодження нормальних компонент швидкості на межах суміжних зон, що відображено у роботах [10–15]. У цих роботах показано, що використання кінематичних модулів різної форми розширює можливості аналітичного опису складних схем течії матеріалу, зокрема в процесах комбінованого видавлювання з кількома ступенями свободи течії. Особливу увагу в цих роботах приділено прямокутним, трикутним і трапецеїдальним модулям, а також модулям із похилими або криволінійними межами [10; 11; 13; 15].

Для кінематичних модулів із похилими або криволінійними межами проблема ускладнення підінтегральних залежностей розглядається в роботах [10, 11]. Оскільки компоненти швидкостей деформації входять до виразу інтенсивності швидкостей деформації під коренем, відповідні підінтегральні залежності часто набувають громіздкого вигляду. У таких випадках застосовують різні прийоми спрощення: лінеаризацію підінтегральних залежностей, верхні оцінки за нерівністю Коші–Буняковського, кубатурні формули або спеціальний вибір функції межі кінематичного модуля [11; 13; 14]. Показано, що пряме застосування лінеаризації не завжди є ефективним для модулів складної конфігурації, тому її доцільність має обґрунтуватися для конкретної розрахункової схеми [11].

Отже, з позицій енергетичного методу балансу потужностей ключовою є не лише побудова КМПШ для окремих зон, а й спосіб аналітичного опису зони формоутворення конічної порожнини. Саме для такої зони, що має похилу внутрішню межу та змінну площу поперечного перерізу зони течії матеріалу, виникає потреба в математичних спрощеннях підінтегральних залежностей для отримання інженерних розрахункових формул [10; 11].

Виділення недосліджених частин загальної проблематики. Аналіз літератури показує, що конічна геометрія достатньо широко розглядається в задачах пластичного формоутворення, а для процесів видавлювання накопичено значний досвід аналітичного, чисельного та експериментального дослідження силового режиму. Разом із тим для прямого видавлювання деталей з конічною порожниною недостатньо розроблені аналітичні залежності для приведення тиску саме в постановці енергетичного методу балансу потужностей із використанням КМПШ.

Окремо невирішеним залишається питання визначення потужності сил пластичного деформування в зоні формоутворення конічної порожнини. Для цієї зони лінійні та зсувна компоненти тензора швидкостей деформації мають складні залежності, а їх поєднання під коренем у виразі інтенсивності швидкості деформації ускладнює отримання компактною аналітичною залежністю. У зв'язку з цим потребує обґрунтування вибір між верхньою оцінкою за нерівністю Коші–Буняковського та лінеаризованою інженерною оцінкою. Також необхідно перевірити, як цей вибір впливає на точність визначення приведення тиску та сили деформування порівняно з результатами МСЕ.

Метою дослідження є одержання та перевірка аналітичних залежностей для визначення приведення тиску прямого видавлювання деталей з конічною порожниною на основі енергетичного методу балансу потужностей, а також порівняння двох варіантів оцінювання потужності сил пластичного деформування в зоні формоутворення конічної порожнини: верхньої оцінки за нерівністю Коші–Буняковського та лінеаризованої оцінки інтенсивності швидкостей деформації.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

1. Побудувати розрахункову схему процесу з поділом осередку деформації на кінематично-елементарні зони та визначити для них кінематично можливі поля швидкостей, компоненти тензора швидкостей деформації й інтенсивності швидкостей деформації.

2. Отримати складові потужності сил пластичного деформування, зрізу та тертя, необхідні для складання рівняння балансу потужностей.

3. Побудувати два варіанти аналітичного визначення приведенного тиску: варіант КБ із використанням верхньої оцінки потужності сил пластичного деформування зони 3 за нерівністю Коші–Буняковського та варіант ЛМ із лінеаризованою оцінкою інтенсивності швидкостей деформації.

4. Обґрунтувати доцільність лінеаризованої оцінки шляхом інтегрального аналізу внеску зсувної складової у квадрат інтенсивності швидкостей деформації зони 3.

5. Виконати параметричний аналіз залежностей приведенного тиску від геометричних параметрів процесу та перевірити отримані аналітичні оцінки шляхом порівняння з результатами моделювання методом скінченних елементів.

Виклад основного матеріалу

Розрахункова схема процесу та загальна постановка енергетичного розрахунку

Схему прямого видавлювання та деталь з конічною порожниною після видавлювання наведено на рис. 1.

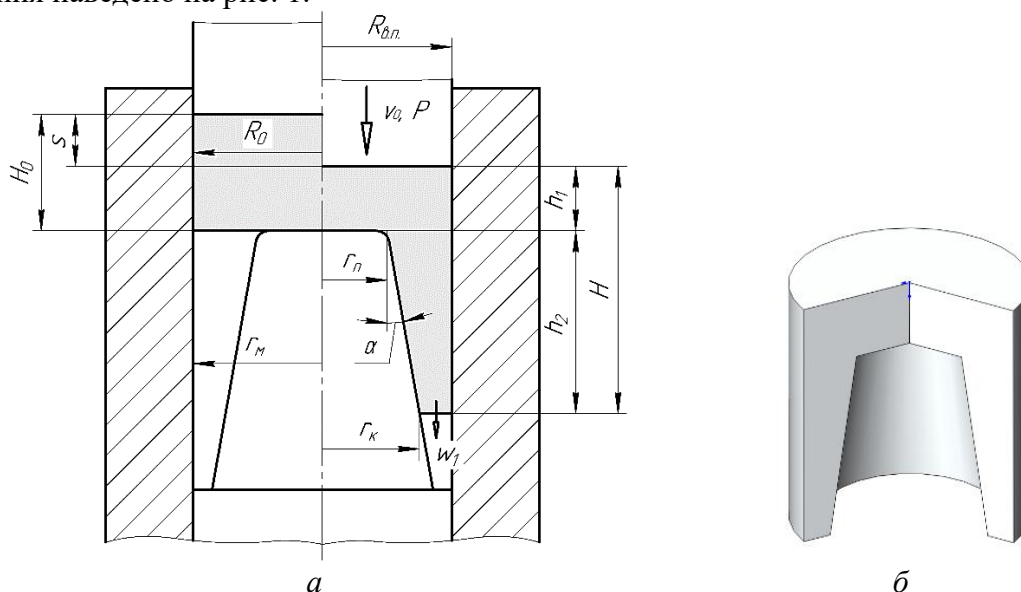


Рис. 1. Схема видавлювання (а) і деталь з конічною порожниною після видавлювання із третинним вирізом (б)

Джерело: розроблено авторами.

Позначення: R_0 – радіус заготовки; H_0 – висота заготовки; r_m – радіус отвору матриці; $R_{в.п.}$ – радіус верхнього пуансона; h_1 – товщина днища деталі; h_2 – висота стінки конічної порожнини; H – загальна висота деталі після деформування; r_n – радіус меншої основи нерухомого протипуансона; r_k – радіус більшої основи конічної порожнини; α – кут нахилу бічної поверхні протипуансона; s – хід верхнього пуансона; v_0 – швидкість переміщення верхнього пуансона; w_1 – швидкість осьового переміщення торцевої межі стінки деталі.

У розглянутій схемі радіус заготовки дорівнює радіусу отвору матриці та радіусу верхнього пуансона: $R_0 = r_m = R_{в.п.}$

Для характеристики взаємного положення більшої основи конічної порожнини та стінки матриці введено зазор $\Delta = r_m - r_k$. У подальшому аналізі ця величина використовується як похідна геометрична характеристика для інтерпретації випадків, у яких більша основа конічної порожнини наближається до стінки матриці.

Розрахунок приведенного тиску виконано за енергетичним методом балансу потужностей [1, 8]. Осередок деформації подано у вигляді трьох кінематично-елементарних зон із заданими КМПШ; розрахункову схему наведено на рис. 2.

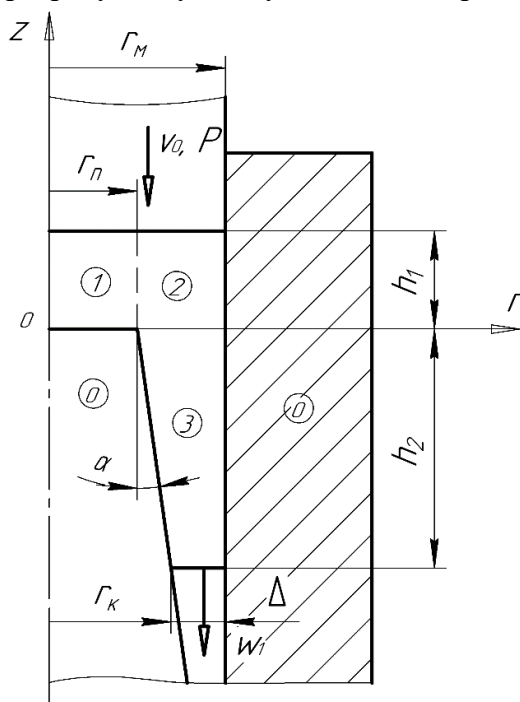


Рис. 2. Розрахункова схема осередку деформації з поділом на кінематично-елементарні зони

Джерело: розроблено авторами

Задачу розглянуто в осесиметричній постановці в циліндричній системі координат r, θ, z . Матеріал заготовки прийнято жорстко-пластичним, ізотропним і нестисненим. Внаслідок осесиметричності окружна компонента швидкості дорівнює нулю: $v_\theta = 0$.

Для кожної зони задається кінематично можливе поле швидкостей, що задовольняє кінематичним граничним умовам, умові нестисненості матеріалу та умовам неперервності нормальної компоненти швидкості на межах суміжних зон [8, 9]. Після визначення компонентів поля швидкостей розраховуються потужності сил пластичного деформування, тертя та зрізу.

Загальне рівняння балансу потужностей для розглянутого процесу можна записати у вигляді [1, 8]:

$$pF_a v_0 = \sum_i N_{di} + \sum_j N_{Tj} + \sum_k N_{зрк}, \quad (1)$$

де p – тиск деформування; $F_a = \pi r_m^2$ – площа контакту активного інструмента із заготовкою; v_0 – швидкість переміщення пуансона; N_{di} – потужність сил пластичного деформування в i -й зоні; N_{Tj} – потужність сил тертя на j -й контактній поверхні; $N_{зрк}$ – потужність сил зрізу на k -й поверхні розриву швидкостей.

Приведений тиск визначається як відношення тиску деформування до напруження текучості матеріалу [1, 8]:

$$\bar{p} = p/\sigma_s.$$

Після ділення рівняння балансу потужностей (1) на $\sigma_s F_a v_0$ отримаємо загальний вираз для приведенного тиску:

$$\bar{p} = \frac{\sum_i N_{di} + \sum_j N_{Tj} + \sum_k N_{зpk}}{\sigma_s F_a v_0} \tag{2}$$

Подальший розрахунок зводиться до побудови кінематично можливих полів швидкостей для виділених зон, визначення відповідних складових потужності внутрішніх сил та отримання залежності для приведенного тиску.

Кінематично можливі поля швидкостей та інтенсивність швидкостей деформації у зонах деформації

Для зони 1 використано відоме КМПШ прямокутного кінематичного модуля осесиметричної задачі [8]. Поле швидкостей зони 2 отримано з урахуванням прямокутної форми її меридіонального перерізу, умови відсутності радіальної швидкості на стінці матриці та узгодження радіальної компоненти швидкості з полем зони 1. Для зони 3, яка відповідає формоутворенню конічної порожнини, використано умову сталості об'ємної витрати через поперечний переріз і рівняння нерозривності для нестисненого матеріалу в осесиметричній постановці. Її похила межа задається залежністю

$$r(z) = -kz + r_{\Pi}, \quad k = \frac{r_{\kappa} - r_{\Pi}}{h_2} = \tan \alpha.$$

На основі отриманих КМПШ визначаються компоненти швидкості деформації в циліндричній системі координат. Для осесиметричної задачі вони мають вигляд [1, 8]:

$$\dot{\epsilon}_{zi} = \frac{\partial v_{zi}}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{ri} = \frac{\partial v_{ri}}{\partial r}; \quad \dot{\epsilon}_{\theta i} = \frac{v_{ri}}{r}; \quad \dot{\gamma}_{rzi} = \frac{\partial v_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial v_{ri}}{\partial z}.$$

Для нестисненого жорстко-пластичного матеріалу компоненти швидкості деформації мають задовольняти умові нестисненості матеріалу [1, 8]:

$$\dot{\epsilon}_{ri} + \dot{\epsilon}_{zi} + \dot{\epsilon}_{\theta i} = 0.$$

Інтенсивність швидкостей деформації визначається за залежністю [1, 8]:

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{zi} - \dot{\epsilon}_{ri})^2 + (\dot{\epsilon}_{ri} - \dot{\epsilon}_{\theta i})^2 + (\dot{\epsilon}_{\theta i} - \dot{\epsilon}_{zi})^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{rzi}^2}.$$

Результати розрахунку компонентів КМПШ та інтенсивності швидкостей деформації у відповідних зонах наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – КМПШ та інтенсивність швидкостей деформації в зонах

Зона	КМПШ	Інтенсивність швидкостей деформації
1	$v_{z1} = -\frac{v_0}{h_1}z; \quad v_{r1} = \frac{v_0}{2h_1}r$	$\dot{\epsilon}_{i1} = \frac{v_0}{h_1}$
2	$v_{z2} = -\frac{v_0 r_{\Pi}^2}{h_1 (r_M^2 - r_{\Pi}^2)}(h_1 - z) - v_0;$ $v_{r2} = -\frac{v_0 r_{\Pi}^2}{2h_1 (r_M^2 - r_{\Pi}^2)} \cdot \frac{r^2 - r_M^2}{r}$	$\dot{\epsilon}_{i2} = \frac{v_0 r_{\Pi}^2}{\sqrt{3} h_1 (r_M^2 - r_{\Pi}^2) r^2} \sqrt{3r^4 + r_M^4}$
3	$v_{z3} = -\frac{v_0 r_M^2}{r_M^2 - r^2(z)};$ $v_{r3} = -\frac{v_0 k r(z) r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \left(r - \frac{r_M^2}{r} \right)$	$\dot{\epsilon}_{i3} = \sqrt{\frac{2}{9} [v_0 k r_M^2]^2 \left[6 \left(\frac{r(z)}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \right)^2 \left[3 + \frac{r_M^4}{r^4} \right] + \frac{3}{2} k^2 \left(r - \frac{r_M^2}{r} \right)^2 \cdot \frac{(r_M^2 + 3r^2(z))^2}{(r_M^2 - r^2(z))^6} \right]}$

Джерело: [8] – зона 1, розроблено авторами – зона 2 і 3.

Наведені в табл. 1 залежності показують, що для зон 1 і 2 вирази інтенсивності швидкостей деформації мають порівняно простий вигляд і можуть бути безпосередньо використані для визначення потужності сил пластичного деформування. Для зони 3, яка відповідає формоутворенню конічної порожнини, залежність $\dot{\epsilon}_{i3}$ є складнішою, оскільки враховує лінійні та зсувну компоненти тензора швидкостей деформації. Тому визначення потужності сил пластичного деформування в цій зоні потребує окремого розгляду.

Визначення потужності сил пластичного деформування

Потужність сил пластичного деформування в i -й зоні визначається інтегруванням інтенсивності швидкостей деформації за об'ємом відповідної зони [1; 8; 9].

Для зон 1 і 2 підстановка інтенсивностей швидкостей деформації з табл. 1 дає можливість отримати потужності сил пластичного деформування прямим інтегруванням:

$$N_{д1} = \pi \sigma_s v_0 r_{п}^2,$$

$$N_{д2} = \frac{2\pi \sigma_s v_0 r_{п}^2}{\sqrt{3}(r_{м}^2 - r_{п}^2)} \left[\frac{r_{м}^2}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{3r_{п}^4 + r_{м}^4} + r_{м}^2}{3(\sqrt{3r_{п}^4 + r_{м}^4} - r_{м}^2)} \right| - \frac{\sqrt{3r_{п}^4 + r_{м}^4}}{2} + r_{м}^2 \right].$$

Для зони 3 потужність сил пластичного деформування в загальному вигляді записується як

$$N_{д3} = 2\pi \sigma_s \int_{r(z)}^{r_{м}} \int_{-h_2}^0 \dot{\epsilon}_{i3} r dz dr. \tag{3}$$

Однак підстановка виразу $\dot{\epsilon}_{i3}$ з табл. 1 приводить до підінтегральної функції, у якій складні залежності лінійних і зсувної компонент тензора швидкостей деформації від r та $r(z)$ поєднуються під коренем. Це ускладнює отримання компактної аналітичної залежності для $N_{д3}$. Тому для побудови першого варіанта КБ аналітичної оцінки використано нерівність Коші–Буняковського [8; 9]:

$$N_{д3} \leq \sigma_s \sqrt{V_3 \iiint_{V_3} \dot{\epsilon}_{i3}^2 dV},$$

де V_3 – об'єм зони 3.

Позначимо:

$$a = \iiint_{V_3} \dot{\epsilon}_{i3}^2 dV = 2\pi \int_{-h_2}^0 \int_{r(z)}^{r_{м}} \dot{\epsilon}_{i3}^2 r dr dz.$$

Об'єм зони 3 визначається як

$$V_3 = 2\pi \int_{-h_2}^0 \int_{r(z)}^{r_{м}} r dr dz = \pi \left(r_{м}^2 h_2 - \frac{r_{к}^3 - r_{п}^3}{3k} \right),$$

де $r_{к} = kh_2 + r_{п}$.

Отже, для варіанта КБ за нерівністю Коші–Буняковського маємо:

$$N_{д3}^{КБ} \leq \sigma_s \sqrt{a\pi \left(r_{м}^2 h_2 - \frac{r_{к}^3 - r_{п}^3}{3k} \right)}.$$

Інтеграл a має громіздкий аналітичний вигляд, тому його обчислення виконано в системі комп'ютерної алгебри Maple. Аналітичний вираз для інтеграла a було перевірено шляхом чисельного інтегрування того самого підінтегрального виразу $\dot{\epsilon}_{i3}^2$. Збігання результатів підтвердило коректність обчислення інтеграла квадрата інтенсивності швидкостей деформації, який використовується в оцінці Коші–Буняковського.

Таким чином, потужності деформування зон 1 і 2 визначаються прямим інтегруванням, тоді як для зони 3 використано аналітично контрольовану верхню оцінку через інтеграл від $\dot{\epsilon}_{i3}^2$. Пряме чисельне інтегрування $\dot{\epsilon}_{i3}$ за виразом (3) може застосовуватися як окрема контрольна процедура, однак у цій роботі основну увагу приділено отриманню аналітичних інженерних залежностей для подальшого розрахунку приведеного тиску.

Потужності сил зрізу та тертя

Крім потужності сил пластичного деформування, у балансі потужностей враховуються потужності сил зрізу на межах суміжних зон та потужності сил тертя на контактних поверхнях матеріалу із матрицею та протипуансоном [1; 8]. Для прийнятої розрахункової схеми сумарна потужність сил зрізу визначається як:

$$N_{зр} = N_{зр1-2} + N_{зр2-3}.$$

На межі зон 1 і 2 розрив швидкостей визначається різницею осьових компонент $\Delta v_{z21} = v_{z2} - v_{z1}$, а на межі зон 2 і 3 – різницею радіальних компонент $\Delta v_{r23} = v_{r2} - v_{r3}$. Після інтегрування за відповідною поверхнею отримано:

$$N_{зр1-2} = \frac{2\pi\sigma_s}{\sqrt{3}} \int_0^{h_1} |\Delta v_{z21}| r dz = \frac{\pi\sigma_s v_0 r_M^2 r_{\Pi} h_1}{\sqrt{3}(r_M^2 - r_{\Pi}^2)},$$

$$N_{зр2-3} = \frac{2\pi\sigma_s}{\sqrt{3}} \int_{r_{\Pi}}^{r_M} |\Delta v_{r23}| r dr = \frac{2\pi\sigma_s}{3\sqrt{3}} \frac{v_0 r_{\Pi}}{(r_M^2 - r_{\Pi}^2)} \left| \frac{kr_M^2}{r_M^2 - r_{\Pi}^2} - \frac{r_{\Pi}}{2h_1} \right| (2r_M^3 - 3r_M^2 r_{\Pi} + r_{\Pi}^3).$$

Сумарна потужність сил тертя [1, 8] враховує тертя на трьох контактних поверхнях: між зоною 2 і стінкою матриці, між зоною 3 і стінкою матриці, а також між зоною 3 і похилою поверхнею протипуансона:

$$N_T = N_{T2-0} + N_{T3-0} + N_{T3-\Pi},$$

де індекс 0 позначає нерухомий інструмент, а Π – контакт із похилою поверхнею протипуансона.

Після інтегрування за відповідними контактними поверхнями отримано:

$$N_{T2-0} = \frac{4\pi\sigma_s\mu_s}{\sqrt{3}} \int_0^{h_1} |v_{z2}| r dz = \frac{2\pi\sigma_s\mu_s r_M v_0 h_1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2r_M^2 - r_{\Pi}^2}{(r_M^2 - r_{\Pi}^2)},$$

$$N_{T3-0} = \frac{4\pi\sigma_s\mu_s}{\sqrt{3}} \int_{-h_2}^0 |v_{z3}| r dz = \frac{2\pi\sigma_s\mu_s v_0 r_M^2}{\sqrt{3}k} \left[\ln \left| \frac{r_{\Pi} - r_M}{r_{\Pi} + r_M} \right| - \ln \left| \frac{r_k - r_M}{r_k + r_M} \right| \right],$$

$$N_{T3-\Pi} = \frac{4\pi\sigma_s\mu_s}{\sqrt{3}} (1 + k^2) \int_{-h_2}^0 |v_{z3}| r(z) dz = \frac{2\pi\sigma_s\mu_s v_0 r_M^2}{\sqrt{3}k} (1 + k^2) \ln \left| \frac{r_{\Pi}^2 - r_M^2}{r_k^2 - r_M^2} \right|.$$

Обґрунтування лінеаризованої оцінки інтенсивності швидкостей деформації зони 3

Після отримання верхньої оцінки $N_{д3}^{KB}$ за нерівністю Коші–Буняковського необхідно оцінити можливість використання для зони 3 лінеаризованої інженерної оцінки інтенсивності швидкостей деформації. У відомих підходах така лінеаризація часто пов'язана з припущенням про відсутність або малу роль зсувної компоненти тензора швидкостей деформації. У розглянутій схемі зсувна складова $\dot{\gamma}_{rz3}$ не дорівнює нулю, тому лінеаризація не вводиться формально через прийняття $\dot{\gamma}_{rz3} = 0$. Спочатку оцінюється інтегральний внесок зсувної складової у квадрат інтенсивності швидкостей деформації зони 3. Для цього квадрат інтенсивності швидкостей деформації $\dot{\epsilon}_{i3}^2$ подано у вигляді суми двох доданків:

$$\dot{\epsilon}_{i3}^2 = \dot{\epsilon}_{n3}^2 + \dot{\epsilon}_{s3}^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{v_0 k r(z) r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \right)^2 \left[3 + \frac{r_M^4}{r^4} \right] + \frac{1}{3} [v_0 k^2 r_M^2]^2 \left(r - \frac{r_M^2}{r} \right)^2 \frac{(r_M^2 + 3r^2(z))^2}{(r_M^2 - r^2(z))^6},$$

де $\dot{\epsilon}_{n3}^2$ – доданок, пов'язаний із лінійними компонентами тензора швидкостей деформації, а $\dot{\epsilon}_{s3}^2$ – доданок, пов'язаний зі зсувною компонентою $\dot{\gamma}_{rz3}$.

Оскільки локальні значення лінійної та зсувної складових змінюються в межах зони 3, їхній внесок оцінювали в інтегральній формі:

$$En = 2\pi \int_{r(z)}^{r_M} \int_{-h_2}^0 \varepsilon_{n3}^2 r dz dr = 2\pi \int_{r(z)}^{r_M} \int_{-h_2}^0 \frac{4}{3} \left(\frac{v_0 k r(z) r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \right)^2 \left[3 + \frac{r_M^4}{r^4} \right] r dz dr,$$

$$Es = 2\pi \int_{r(z)}^{r_M} \int_{-h_2}^0 \varepsilon_{s3}^2 r dz dr = 2\pi \int_{r(z)}^{r_M} \int_{-h_2}^0 \frac{1}{3} [v_0 k^2 r_M^2]^2 \left(r - \frac{r_M^2}{r} \right)^2 \frac{(r_M^2 + 3r^2(z))^2}{(r_M^2 - r^2(z))^6} r dz dr.$$

На їх основі визначено показники:

$$Ks = \frac{Es}{En}, \quad \eta_s = \frac{Es}{(En + Es)} 100\%.$$

Показник Ks характеризує відношення інтегрального внеску зсувної складової до інтегрального внеску лінійних складових, тоді як η_s – інтегральну частку внеску зсувної складової у сумарному інтегральному значенні квадрата інтенсивності швидкостей деформації. Саме η_s використано як основний показник для оцінювання ролі зсувної складової в зоні 3.

Аналітичні вирази для En , Es , Ks та η_s отримано в системі Maple. Через громіздкість цих залежностей у тексті наведено лише їх інтегральне визначення та результати параметричного аналізу. Для переходу до безрозмірної форми лінійні параметри нормовано на радіус отвору матриці r_M . Для цього введено: $\bar{r}_n = r_n/r_M$, $\bar{h}_2 = h_2/r_M$, $\bar{r}_k = \bar{r}_n + \bar{h}_2 \tan \alpha$.

Відносний зазор між більшою основою конічної порожнини та стінкою матриці дорівнює

$$\bar{\Delta} = 1 - \bar{r}_k = 1 - \bar{r}_n - \bar{h}_2 \tan \alpha. \tag{4}$$

Після нормування результати інтегрування величин En та Es містять спільний масштабний множник, пов'язаний із v_0 та r_M , який скорочується при визначенні Ks та η_s . Тому показники Ks і η_s залежать від безрозмірних параметрів \bar{r}_n , \bar{h}_2 , кута α , а величина $\bar{\Delta}$ використовується як похідна характеристика наближення більшої основи конічної порожнини до стінки матриці.

На рис. 3 наведено залежність η_s від кута α для двох значень відносної висоти \bar{h}_2 та двох значень відносного радіуса \bar{r}_n . Для кожної кривої значення $\bar{\Delta}$ змінюється відповідно до співвідношення (4).

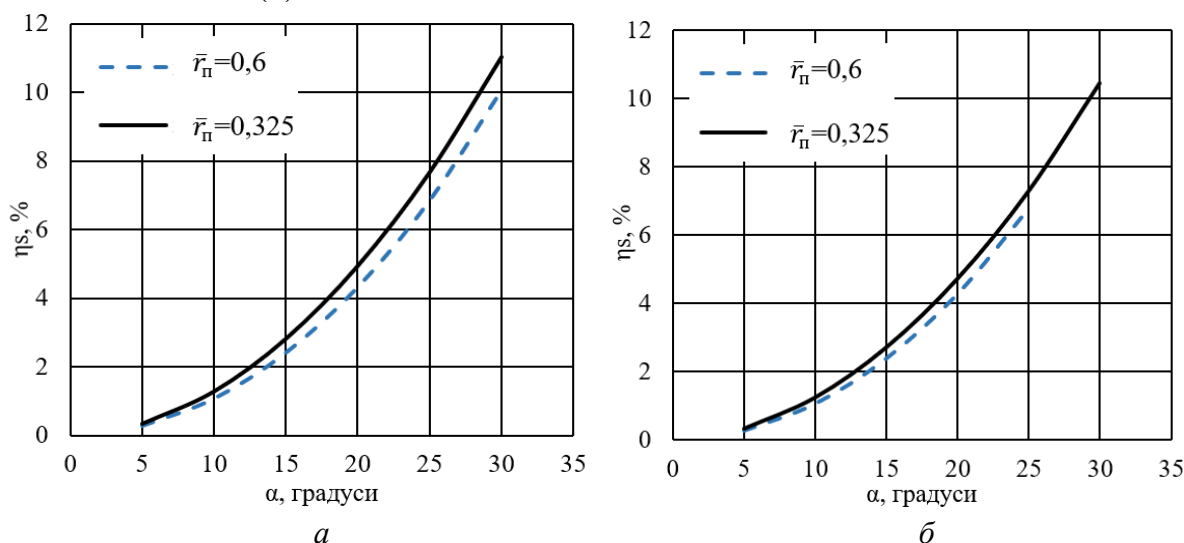


Рис. 3. Залежність інтегральної частки внеску зсувної складової η_s від кута α при різних значеннях \bar{r}_n :
 $a - \bar{h}_2 = 0,50$; $б - \bar{h}_2 = 0,75$

Джерело: розроблено авторами.

Аналіз залежностей показує, що частка зсувної складової у досліджених параметричних зрізах залишається відносно невеликою і змінюється приблизно в межах 0,3...11%. Основним фактором її зростання є кут нахилу конічної поверхні α : зі збільшенням α частка ηs монотонно зростає. Водночас збільшення \bar{h}_2 та \bar{r}_Π не призводить до збільшення відносної ролі зсувної складової; для розглянутих зрізів навіть спостерігається її слабке зменшення.

Зменшення $\bar{\Delta}$ пов'язане з наближенням $r(z)$ до r_M . У виразах для компонент тензора швидкостей деформації зони 3 це супроводжується зростанням внеску членів зі знаменниками виду $r_M^2 - r^2(z)$. Тому інтегральні величини En та Es можуть істотно зростати. Водночас частка ηs не демонструє такого ж різкого збільшення, оскільки зростають обидві складові інтегральної оцінки.

Для вибору компоненти, через яку виконується лінеаризація, розглянемо співвідношення між лінійними компонентами швидкості деформації у зоні 3:

$$\dot{\epsilon}_{z3} = \frac{2v_0kr(z)r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2}; \dot{\epsilon}_{r3} = -\frac{v_0kr(z)r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \cdot \left(1 + \frac{r_M^2}{r^2}\right); \dot{\epsilon}_{\theta 3} = -\frac{v_0kr(z)r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \left(1 - \frac{r_M^2}{r^2}\right). \quad (5)$$

Позначимо

$$A = \frac{v_0kr(z)r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2}.$$

Тоді лінійні компоненти швидкості деформації (5) можна записати у вигляді:

$$\dot{\epsilon}_{z3} = 2A; \dot{\epsilon}_{r3} = -A \left(1 + \frac{r_M^2}{r^2}\right); \dot{\epsilon}_{\theta 3} = -A \left(1 - \frac{r_M^2}{r^2}\right).$$

Оскільки в межах зони 3 $r \leq r_M$, то $\frac{r_M^2}{r^2} \geq 1$. Звідси випливає, що:

$$|\dot{\epsilon}_{r3}| \geq |\dot{\epsilon}_{z3}|, |\dot{\epsilon}_{r3}| > |\dot{\epsilon}_{\theta 3}|.$$

Отже, у межах прийнятої кінематичної схеми зони 3 радіальна компонента тензора швидкостей деформації є максимальною за модулем лінійною компонентою. Це дає підстави використати лінеаризовану оцінку інтенсивності швидкостей деформації у вигляді [8; 11]:

$$\dot{\epsilon}_{i3}^{LM} \approx 1,08|\epsilon_{max}| = 1,08|\dot{\epsilon}_{r3}| = 1,08 \frac{v_0kr(z)r_M^2}{(r_M^2 - r^2(z))^2} \cdot \left(1 + \frac{r_M^2}{r^2}\right).$$

Тоді потужність сил пластичного деформування зони 3 варіанту ЛМ для лінеаризованого методу визначається як:

$$\begin{aligned} N_{д3}^{LM} &= 2\pi\sigma_s \int_{r(z)}^{r_M} \int_{-h_2}^0 \dot{\epsilon}_{i3}^{LM} r dz dr = \\ &= 1,08\pi\sigma_s v_0 r_M^2 \left(\ln \left(\left| \frac{r_\Pi^2 - r_M^2}{r_k^2 - r_M^2} \right| \right) - \frac{r_\Pi^2 \ln|r_\Pi| - r_M^2 \ln r_M}{(r_\Pi^2 - r_M^2)} + \frac{r_k^2 \ln|r_k| - r_M^2 \ln r_M}{(r_k^2 - r_M^2)} \right). \end{aligned}$$

Таким чином, у варіанті ЛМ складний вираз інтенсивності швидкостей деформації, що містить радикал замінюється лінеаризованою оцінкою через домінуючу лінійну компоненту після попередньої інтегральної оцінки ролі зсувної складової. Це дозволяє отримати аналітично придатний вираз для потужності сил пластичного деформування зони 3 та порівняти його з верхньою оцінкою КБ у подальшому визначенні приведенного тиску.

Приведений тиск за варіантами КБ і ЛМ

Після визначення складових потужності сил пластичного деформування, зрізу та тертя загальний вираз для приведенного тиску можна записати для двох варіантів розрахунку. У варіанті КБ для зони 3 використовується верхня оцінка $N_{д3}^{KB}$, отримана на основі нерівності Коші–Буняковського. У варіанті ЛМ використовується лінеаризована оцінка $N_{д3}^{LM}$.

Тому для варіанта КБ згідно з виразом (2) маємо

$$\bar{p}_{\text{КБ}} = \frac{N_{\text{Д1}} + N_{\text{Д2}} + N_{\text{Д3}}^{\text{КБ}} + N_{\text{Т}} + N_{\text{ЗР}}}{\sigma_s v_0 \pi r_{\text{М}}^2}, \tag{6}$$

а для варіанта ЛМ:

$$\bar{p}_{\text{ЛМ}} = \frac{N_{\text{Д1}} + N_{\text{Д2}} + N_{\text{Д3}}^{\text{ЛМ}} + N_{\text{Т}} + N_{\text{ЗР}}}{\sigma_s v_0 \pi r_{\text{М}}^2}. \tag{7}$$

Таким чином, обидві моделі мають однакові складові потужностей тертя та зрізу, а також однакові потужності деформування в зонах 1 і 2. Різниця між ними визначається тільки способом оцінки складової $N_{\text{Д3}}$, яка відповідає зоні формоутворення конічної порожнини.

Для подальшого параметричного аналізу отримані залежності для приведенного тиску приведено до безрозмірної форми. Лінійні параметри нормовано на радіус матриці $r_{\text{М}}$: $\bar{r}_{\text{П}} = r_{\text{П}}/r_{\text{М}}$, $\bar{r}_{\text{К}} = \bar{r}_{\text{П}} + \bar{h}_2 \tan \alpha$, $\bar{h}_1 = h_1/r_{\text{М}}$, $\bar{h}_2 = h_2/r_{\text{М}}$.

Після нормування приведений тиск для двох варіантів розрахунку (6) і (7) можна розглядати як функції:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{\text{КБ}} &= f_{\text{КБ}}(\bar{r}_{\text{П}}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \alpha, \mu_s), \\ \bar{p}_{\text{ЛМ}} &= f_{\text{ЛМ}}(\bar{r}_{\text{П}}, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \alpha, \mu_s). \end{aligned}$$

Нормування формул і подальші параметричні розрахунки виконано в Maple. Через громіздкість повних аналітичних виразів у статті наведено їх структурну форму та результати графічного аналізу. Подальший аналіз залежностей $\bar{p}(\alpha)$ та $\bar{p}(\bar{r}_{\text{П}})$ дозволяє оцінити вплив вибору варіанта КБ або ЛМ на розрахунковий силовий режим процесу.

Параметричний аналіз приведенного тиску

Після отримання залежностей для приведенного тиску за варіантами КБ і ЛМ виконано параметричний аналіз їхньої поведінки у відносних параметрах. Основну увагу приділено впливу кута нахилу конічної поверхні α , відносного радіуса протипуансона $\bar{r}_{\text{П}}$ та відносної висоти зони формоутворення конічної порожнини \bar{h}_2 .

На рис. 4 наведено залежності приведенного тиску за двома варіантами розрахунку – КБ і ЛМ від кута α для двох значень відносної висоти \bar{h}_2 та двох значень відносного радіуса протипуансона $\bar{r}_{\text{П}}$ при коефіцієнті тертя $\mu_s = 0,1$.

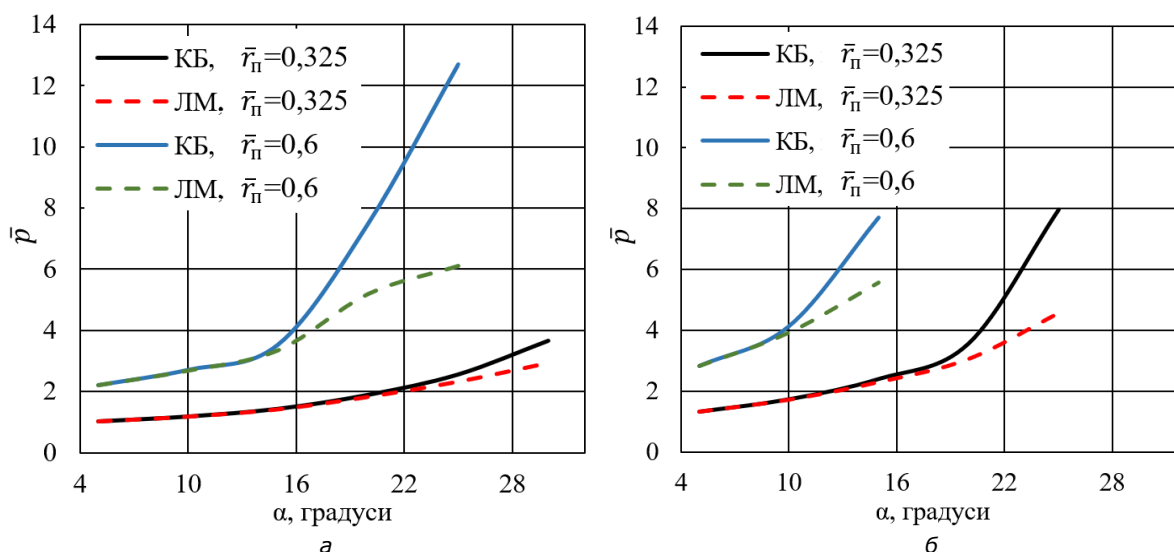


Рис. 4. Залежність приведенного тиску \bar{p} від α для двох значень $\bar{r}_{\text{П}}$ за $\mu_s=0,1$:

$a - \bar{h}_2=0,875$; $б - \bar{h}_2=1,375$

Джерело: розроблено авторами.

Аналіз залежностей $\bar{p}(\alpha)$ показує, що обидва варіанти розрахунку якісно однаково відтворюють загальну тенденцію зростання приведенного тиску зі збільшенням кута нахилу конічної поверхні. Це пояснюється тим, що збільшення α посилює радіальну складову течії матеріалу в зоні формоутворення конічної порожнини та змінює геометрію кільцевого зазору між протипуансоном і стінкою матриці. За меншої відносної висоти \bar{h}_2 і меншого значення \bar{r}_n розбіжність між КБ і ЛМ залишається помірною в усьому розглянутому діапазоні кутів. Для більшого значення \bar{r}_n , особливо при збільшенні \bar{h}_2 , розходження між варіантами КБ і ЛМ стає суттєвішим. Це пов'язано з тим, що більші значення \bar{r}_n , \bar{h}_2 і α безпосередньо зменшують $\bar{\Delta}$, що підсилює внесок зони 3 у сумарну потужність деформування. Унаслідок цього варіант КБ дає значно вищі значення приведенного тиску, тоді як ЛМ зберігає більш помірну зміну \bar{p} .

На рис. 5 наведено залежності приведенного тиску за двома варіантами розрахунку – КБ і ЛМ від відносного радіуса протипуансона \bar{r}_n для двох характерних значень кута α при $\mu_s = 0,1$.

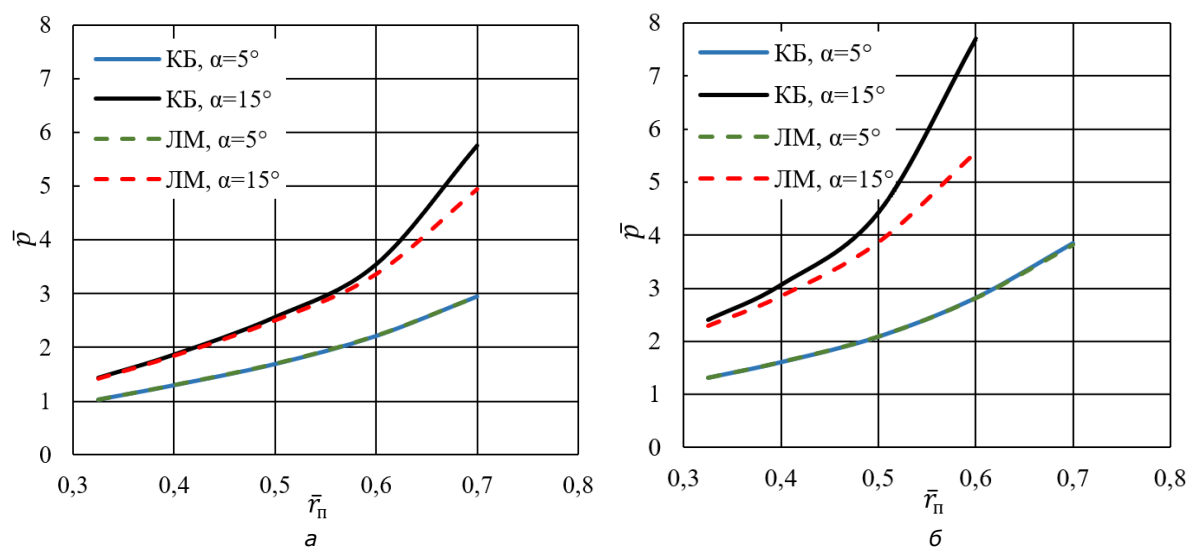


Рис. 5. Залежність приведенного тиску \bar{p} від \bar{r}_n для двох значень α за $\mu_s=0,1$:
 $a - \bar{h}_2=0,875$; $b - \bar{h}_2=1,375$

Джерело: розроблено авторами.

Залежності $\bar{p}(\bar{r}_n)$ підтверджують, що збільшення відносного радіуса протипуансона приводить до зростання приведенного тиску для обох варіантів розрахунку. При меншому куті α це зростання має плавний характер, а криві КБ і ЛМ практично збігаються, тому на графіках вони частково накладаються одна на одну. Це свідчить про незначний вплив способу оцінювання $N_{д3}$ у цій області параметрів. При більшому куті вплив \bar{r}_n посилюється: більша основа конічної порожнини наближається до стінки матриці, $\bar{\Delta}$ зменшується. У цій області варіант КБ стає значно чутливішим до зміни геометрії, тоді як ЛМ забезпечує більш згладжену оцінку приведенного тиску.

Таким чином, параметричний аналіз показує, що КБ і ЛМ однаково описують загальну якісну тенденцію зміни приведенного тиску при варіюванні α , \bar{r}_n та \bar{h}_2 . Кількісна різниця між ними проявляється переважно для таких поєднань геометричних параметрів, за яких більша основа конічної порожнини наближається до стінки матриці. У цих випадках зростає внесок зони формоутворення конічної порожнини, і варіант КБ може давати істотно вищі значення \bar{p} , тоді як ЛМ у цій області забезпечує помірнішу зміну приведенного тиску. Остаточна оцінка доцільності використання КБ або ЛМ потребує порівняння розрахункових значень сили видавлювання з результатами моделювання МСЕ.

Порівняння результатів розрахунку з МСЕ

Для оцінювання адекватності отриманих аналітичних залежностей виконано порівняння результатів енергетичного розрахунку з даними моделювання методом скінченних елементів. Моделювання МСЕ виконано в програмному комплексі QForm для заготовок зі сплаву АМц. Для всіх випадків використано матрицю з однаковим радіусом отвору $r_m = 40$ мм, швидкість переміщення пуансона $v_0 = 1$ мм/с та коефіцієнт тертя $\mu_s=0,1$. Як контрольне значення сили $P_{мсе}$ використовували силу видавлювання в кінці робочого ходу, коли були досягнуті кінцеві розміри деталі.

Для зіставлення з результатами МСЕ отримані значення приведенного тиску перераховано у силу видавлювання. Для переходу від безрозмірного приведенного тиску до сили видавлювання використано середній опір деформуванню $\bar{\sigma}_s$, визначений за степеневою апроксимацією кривої зміцнення сплаву АМц. Оскільки приведений тиск визначено як $\bar{p} = p/\bar{\sigma}_s$, то сила видавлювання визначається за залежністю $P = \bar{p}\bar{\sigma}_s F_a$.

Відповідно, для двох варіантів енергетичного розрахунку маємо:

$$P_{KB} = \bar{p}_{KB}\bar{\sigma}_s\pi r_m^2, \quad P_{LM} = \bar{p}_{LM}\bar{\sigma}_s\pi r_m^2.$$

Для визначення середнього опору деформуванню використано степеневу апроксимацію для сплаву АМц, прийняту в розрахунках:

$$\sigma_s = 175,6\varepsilon^{0,173}.$$

З урахуванням зміцнення матеріалу середній опір деформуванню прийнято у вигляді

$$\bar{\sigma}_s = \frac{175,6\varepsilon^{0,173}}{1 + 0,173}.$$

Репрезентативну деформацію ε визначено за зміною площі поперечного перерізу матеріалу, що переходить у кільцевий зазор між стінкою матриці та конічною поверхнею протипуансона. Для розглянутого випадку площа кільцевого зазору змінюється вздовж висоти конічної ділянки тому деформацію усереднено по висоті h_2 :

$$\varepsilon = \frac{1}{h_2} \int_0^{h_2} \ln \left(\frac{r_m^2}{r_m^2 - (r_n + h \tan \alpha)^2} \right) dh.$$

Відносну похибку розрахунку сили видавлювання визначено за формулою:

$$\delta = \frac{|P_{розр} - P_{мсе}|}{P_{мсе}} 100\%.$$

Набір контрольних випадків і результати порівняння наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Набір контрольних випадків для порівняння КБ і ЛМ з результатами МСЕ

№ контр. випадку	\bar{r}_n	α , град.	h_2 , мм	$\bar{\Delta}$	\bar{p}_{KB}	\bar{p}_{LM}	$P_{мсе}$, МН	P_{KB} , МН	P_{LM} , МН	δ_{KB} , %	δ_{LM} , %
K1	0,325	5	32,19	0,605	1,0287	1,0235	0,52	0,5506	0,5480	5,88	5,37
K2	0,600	5	32,76	0,328	2,2158	2,2159	1,36	1,4892	1,4892	9,50	9,50
K3	0,325	15	35,01	0,440	1,4378	1,4177	0,82	0,8366	0,8251	2,02	0,62
K4	0,600	15	37,28	0,150	3,5478	3,3595	2,20	2,5596	2,4238	16,34	10,17
K5	0,325	5	53,41	0,558	1,3211	1,3141	0,68	0,7246	0,7209	6,56	6,02
K6	0,600	5	55,07	0,280	2,8199	2,8136	1,68	1,9304	1,9261	14,90	14,64
K7	0,325	15	58,75	0,281	2,4001	2,2891	1,42	1,5064	1,4370	6,08	1,20
K8	0,600	15	52,42	0,049	7,6966	5,5731	3,90	5,8432	4,2310	49,82	8,49
K9	0,600	20	38,42	0,050	7,5039	5,2020	3,70	5,7032	3,9537	54,14	6,86
K10	0,325	25	52,87	0,059	7,9722	4,5573	3,25	5,6059	3,2054	72,49	1,37

Джерело: розроблено авторами.

На рис. 6 наведено порівняння сил видавлювання, отриманих за результатами моделювання МСЕ та за двома варіантами енергетичного розрахунку.

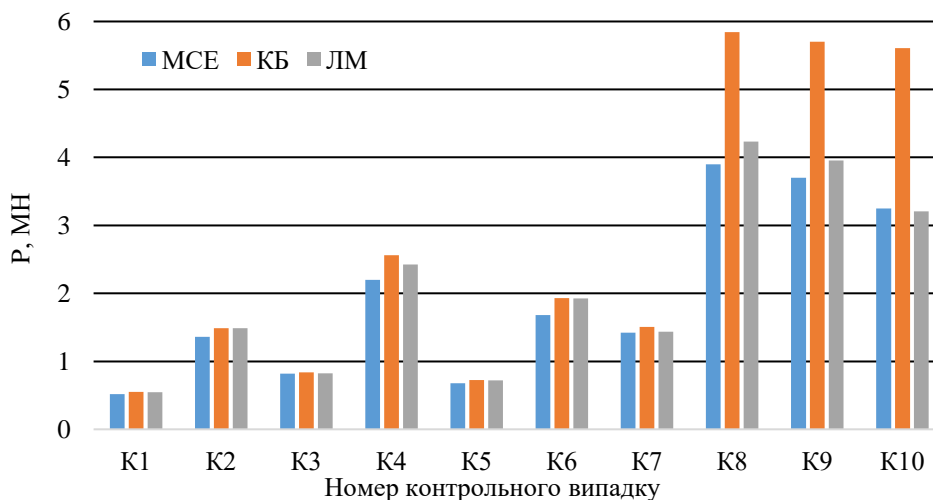


Рис. 6. Порівняння сил видавлювання за МСЕ, КБ та ЛМ для характерних випадків
Джерело: розроблено авторами.

Аналіз табл. 2 і рис. 6 показує, що для частини випадків обидва варіанти енергетичного розрахунку дають близькі результати. Це особливо помітно для випадків із малим кутом $\alpha = 5^\circ$, де різниця між КБ і ЛМ практично відсутня. У таких випадках розбіжність із МСЕ зумовлена не способом визначення $N_{дз}$, а загальними припущеннями прийнятої енергетичної схеми.

Для випадків із малим відносним зазором $\bar{\Delta}$ розбіжність між варіантами стає значно більшою. Найбільш показовими є К8, К9 і К10, для яких $\bar{\Delta}$ становить відповідно 0,049; 0,050 та 0,059. У цих випадках варіант КБ істотно завищує силу видавлювання: сила становить 5,84 МН, 5,70 МН і 5,60 МН відповідно, тоді як для ЛМ вона дорівнює 4,23 МН, 3,95 МН і 3,21 МН.

На рис. 7 наведено відносні похибки розрахункових варіантів КБ і ЛМ відносно результатів МСЕ.

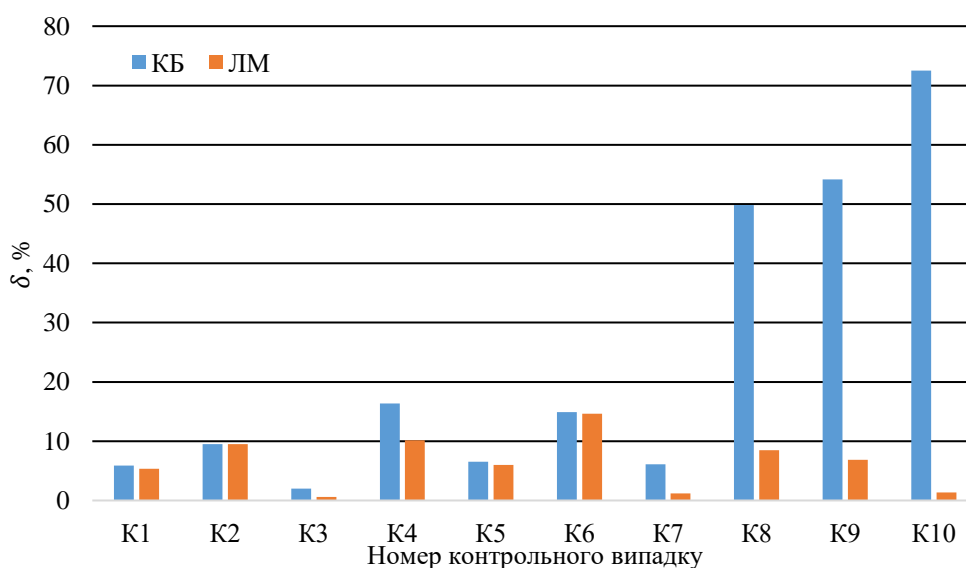


Рис. 7. Відносна похибка визначення сили деформування за варіантами КБ та ЛМ відносно МСЕ

Джерело: розроблено авторами.

Діаграма похибок підтверджує висновок параметричного аналізу: основна проблемна область варіанта КБ пов'язана з малими значеннями $\bar{\Delta}$, коли більша основа конічної порожнини наближається до стінки матриці. Такі випадки відповідають завершальній стадії формоутворення відносно тонкостінних деталей з конічною внутрішньою поверхнею. У цій області внесок зони 3 у сумарну потужність деформування зростає, тому варіант КБ дає завищені значення сили, тоді як лінеаризований варіант краще узгоджується з результатами МСЕ.

Узагальнені статистичні показники також підтверджують перевагу ЛМ для розглянутого набору випадків. Середня абсолютна похибка становить 23,8 % для КБ і 6,4 % для ЛМ; медіанна похибка – відповідно 12,2 і 6,4 %; максимальна – 72,5 % і 14,6 %. ЛМ дає меншу абсолютну похибку у 9 із 10 контрольних випадків. Водночас отримані оцінки слід розглядати в межах прийнятої кінематичної схеми, матеріальної апроксимації та використаного набору контрольних випадків моделювання МСЕ.

Висновки.

1. Побудовано розрахункову схему прямого видавлювання деталей з конічною порожниною на основі енергетичного методу балансу потужностей. Осередок деформації подано у вигляді трьох кінематично-елементарних зон, для яких визначено КМПШ, інтенсивності швидкостей деформації та складові потужностей пластичного деформування, зрізу й тертя.

2. Встановлено, що основна математична складність розрахунку пов'язана із зоною 3, яка відповідає формоутворенню конічної порожнини. Для цієї зони лінійні та зсувна компоненти тензора швидкостей деформації мають складні залежності від r та $r(z)$, а їх поєднання під коренем у виразі інтенсивності швидкостей деформації ускладнює отримання компактної аналітичної залежності для N_{d3} . Тому розглянуто два варіанти визначення потужності сил пластичного деформування зони 3: верхню оцінку за нерівністю Коші–Буняковського та лінеаризовану оцінку через максимальну за модулем нормальну компоненту швидкостей деформації.

3. Обґрунтовано використання лінеаризованої оцінки для зони 3. Інтегральний аналіз внеску зсувної складової показав, що її частка в квадраті інтенсивності швидкостей деформації для досліджених параметричних зрізів становить приблизно 0,3...11%. Встановлено, що головним фактором зростання η_s є кут нахилу конічної поверхні α , тоді як збільшення \bar{h}_2 та \bar{r}_n не приводить до посилення відносної ролі зсувної складової.

4. Параметричний аналіз показав, що обидва варіанти розрахунку якісно відтворюють зростання приведенного тиску зі збільшенням α та \bar{r}_n . Кількісна різниця між КБ і ЛМ визначається насамперед відносним зазором $\bar{\Delta}$. При великих і помірних значеннях $\bar{\Delta}$ результати двох варіантів залишаються близькими, тоді як при малих $\bar{\Delta}$ варіант КБ стає надмірно чутливим до внеску зони 3 і може суттєво завищувати приведений тиск.

5. Порівняння з результатами МСЕ для 10 характерних випадків показало кращу кількісну відповідність лінеаризованого варіанта силовому режиму процесу. Середня абсолютна похибка становить 23,8 % для КБ та 6,4 % для ЛМ; медіанна похибка – відповідно 12,2 % і 6,4 %; максимальна – 72,5 % і 14,6 % відповідно. ЛМ дає меншу абсолютну похибку у 9 із 10 розглянутих випадків. Отримані результати дозволяють розглядати ЛМ як доцільний інженерний варіант оцінювання приведенного тиску та сили видавлювання в межах дослідженої параметричної області, особливо для випадків із малим $\bar{\Delta}$. Подальше уточнення меж застосовності моделі потребує розширення перевірки МСЕ та експериментально за геометричними параметрами, умовами тертя та матеріалами.

Заява про використання генеративного ШІ та технологій на основі ШІ

Генеративний штучний інтелект (ChatGPT, OpenAI) використовувався авторами як допоміжний інструмент для мовного редагування, структурного впорядкування тексту та перевірки узгодженості термінології. Він не використовувався для отримання розрахункових даних, результатів моделювання, аналітичних залежностей, графічних матеріалів або наукових висновків. Усі результати, формули, інтерпретації та висновки перевірені авторами, які несуть повну відповідальність за зміст статті.

Список використаних джерел

1. Алієв, І. С., Грудкіна, Н. С., Малій, Х. В., & Таган, Л. В. (2021). *Моделювання та розробка процесів точного об'ємного штампування видавлюванням*. ДДМА. <https://dspace.mipolytech.education/handle/mip/512>.
2. Алієв, І. С., Левченко, В. М., Марков, О. Є., Абхари, П. Б., & Малій, Х. В. (2023). Моделювання процесу видавлювання порожнистих конічних деталей. *Математичне моделювання*, 1(48), 147–156. [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(48\)2023.280802](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(48)2023.280802).
3. Калюжний, О. В., Піманов, В. В., & Савчук, І. М. (2010). Розрахунковий аналіз холодного зворотного видавлювання конічних порожнин. *Вісник НТУУ «КПІ». Машинобудування*, 60, 64–67. <https://ela.kpi.ua/items/3e9eba8b-352a-4dc4-ae74-f520dfa36bba>.
4. Сабол, С. Ф., Піманов, В. В., & Коробка, Є. М. (2015). Комбіноване холодне видавлювання конічної порожнистої заготовки для виробу спеціального призначення. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії*, 24(1133), 103–107. https://library.kpi.kharkov.ua/files/Vestniki/2015_24.pdf.
5. Алиев, И. С., Корденко, М. Ю., & Самогладов, А. Д. (2018). Комбинированное выдавливание полых конических деталей. *Обработка материалов давлением*, 2(47), 90–95. [http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2\(47\)_2018/article/16.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2(47)_2018/article/16.pdf).
6. Калюжний, В. Л., Алієва, Л. І., Ярмоленко, О. С., & Ситник, С. В. (2022). Гаряче видавлювання із високовуглецевої сталі конусних порожнистих виробів. *Mechanics and Advanced Technologies*, 6(3), 302–308. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2022.6.3.269897>.
7. Грановський, А. Є. (2025). Верхня оцінка приведенного тиску та оптимізація параметрів схеми прямого видавлювання деталей з конічною порожниною. *Mechanics and Advanced Technologies*, 9(4(107)), 442–455. [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.4\(107\).344506](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.4(107).344506).
8. Алієв, І. С. (2023). *Енергетичні методи досліджень процесів обробки металів тиском*. ДДМА. <http://dspace.dgma.donetsk.ua:8080/jspui/handle/DSEA/943>.
9. Грудкіна, Н. С. (2021). *Розвиток енергетичних методів аналізу технологічних режимів та удосконалення процесів точного об'ємного штампування видавлюванням* [Докторська дисертація, Донбаська державна машинобудівна академія]. ДДМА. https://uacademic.info/ua/document/0521U101565#google_vignette.
10. Hrudkina, N. S., & Aliieva, L. I. (2020). Modeling of cold extrusion processes using kinematic trapezoidal modules. *FME Transactions*, 48(2), 357–363. <https://doi.org/10.5937/fme2002357H>.
11. Hrudkina, N., Aliieva, L., Abhari, P., Kuznetsov, M., & Shevtsov, S. (2019). Derivation of engineering formulas in order to calculate energy-power parameters and a shape change in a semi-finished product in the process of combined extrusion. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7(98)), 49–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.160585>.
12. Aliieva, L., Hrudkina, N., Aliiev, I., Zbankov, I., & Markov, O. (2020). Effect of the tool geometry on the force mode of the combined radial-direct extrusion with compression. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(1(104)), 15–22. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.198433>.
13. Грудкіна, Н. С. (2020). Особливості моделювання процесів радіально-поздовжнього видавлювання із використанням трикутних кінематичних модулів. *Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського*, 2(121), 110–115. <https://doi.org/10.30929/1995-0519.2020.2.110-115>.
14. Алиева, Л. И., Грудкина, Н. С., & Крюгер, К. (2017). Моделирование процесса радиально-обратного выдавливания полых деталей. *Mechanics and Advanced Technologies*, 1(79), 91–99. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2017.79.95873>.

15. Vlasenko, K., Hrudkina, N., Reutova, I., & Chumak, O. (2018). Development of calculation schemes for the combined extrusion to predict the shape formation of axisymmetric parts with a flange. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(1(93)), 51–59. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.131766>.
16. Amini, A., Moslemi Naeini, H., Deilami Azodi, H., Talebi-Ghadikolaee, H., Badparva, H., & Zeinolabedin-Beygi, A. (2025). Hydro-mechanical deep drawing of conical components: Wrinkling behavior and process enhancement. *Journal of Engineering Research*, 13(2), 975–984. <https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.04.005>.
17. Gorji, A., Alavi-Hashemi, H., Bakhshi-Jooybari, M., Nourouzi, S., & Hosseinipour, S. J. (2011). Investigation of hydrodynamic deep drawing for conical–cylindrical cups. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 56(9–12), 915–927. <https://doi.org/10.1007/s00170-011-3263-0>.
18. Thiruvavurudchelvan, S., & Tan, M. J. (2004). The drawing of conical cups using an annular urethane pad. *Journal of Materials Processing Technology*, 147(2), 163–166. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2003.12.011>.
19. Shewakh, W. M., & Hassab-Allah, I. M. (2024). Finite element simulation and experimental verification of circular tube nosing through conical dies. *Applied Sciences*, 14(6), Article 2337. <https://doi.org/10.3390/app14062337>.
20. Han, Z. R., Fan, Z. J., Xiao, Y., & Jia, Z. (2017). A research on thickness distribution of oblique cone in dieless shear spinning. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 90(9–12), 2901–2912. <https://doi.org/10.1007/s00170-016-9565-5>.

References

1. Aliiev, I. S., Hrudkina, N. S., Malii, Kh. V., & Tahan, L. V. (2021). *Modeliuvannia ta rozrobka protsesiv tochnoho obiemnoho shtampuvannia vydavliuvanniam* [Modeling and development of precision bulk stamping processes by extrusion]. DDMA. <https://dspace.mipolytech.education/handle/mip/512>.
2. Aliiev, I. S., Levchenko, V. M., Markov, O. Ye., Abhari, P. B., & Malii, Kh. V. (2023). Modeliuvannia protsesu vydavliuvannia porozhnystykh konichnykh detalei [Modeling of the extrusion process of hollow conical parts]. *Matematychni modeliuvannia - Mathematical Modelling*, 1(48), 147–156. [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(48\)2023.280802](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(48)2023.280802).
3. Kaliuzhnyi, O. V., Pimanov, V. V., & Savchuk, I. M. (2010). Rozrakhunkovyi analiz kholodnoho zvorotnoho vydavliuvannia konichnykh porozhnyn [Computational analysis of cold backward extrusion of conical cavities]. *Visnyk NTUU “KPI”. Mashynobuduvannia – Journal of the National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnical University”*, 60, 64–67. <https://ela.kpi.ua/items/3e9e6a8b-352a-4dc4-ae74-f520dfa36bba>.
4. Sabol, S. F., Pimanov, V. V., & Korobka, Ye. M. (2015). Kombinovane kholodne vydavliuvannia konichnoi porozhnystoi zahotovky dlia vyrobu spetsialnogo pryznachennia [Combined cold extrusion of a conical hollow billet for a special-purpose product]. *Visnyk NTU “KhPI”. Serii: Innovatsiini tekhnologii ta obladnannia obrobky materialiv u mashynobuduvanni ta metalurhii - Bulletin of the National Technical University ‘Kharkiv Polytechnic Institute’. Series: Innovative Technologies and Equipment for Materials Processing in Mechanical Engineering and Metallurgy*, 24(1133), 103–107. https://library.kpi.kharkov.ua/files/Vestniki/2015_24.pdf.
5. Aliev, I. S., Kordenko, M. Yu., & Samoglyadov, A. D. (2018). Kombinirovannoe vydavliuvanie polykh konicheskikh detalei [Combined extrusion of hollow conical parts]. *Obrabotka materialov davleniem - Pressure treatment of materials*, 2(47), 90–95. [http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2\(47\)_2018/article/16.pdf](http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/omd/omd_2(47)_2018/article/16.pdf).
6. Kaliuzhnyi, V. L., Aliieva, L. I., Yarmolenko, O. S., & Sytnyk, S. V. (2022). Hariache vydavliuvannia iz vysokovuhletsevoi stali konusnykh porozhnystykh vyrobiv [Hot extrusion of conical hollow products from high-carbon steel]. *Mechanics and Advanced Technologies*, 6(3), 302–308. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2022.6.3.269897>.
7. Hranovskyi, A. Ye. (2025). Verkhnia otsinka pryvedenoho tysku ta optymizatsiia parametriv skhemy priamoho vydavliuvannia detalei z konichnoiu porozhnynoiu [Upper estimate of reduced pressure and optimization of parameters of the direct extrusion scheme for parts with a conical cavity]. *Mechanics and Advanced Technologies*, 9(4(107)), 442–455. [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.4\(107\).344506](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.4(107).344506).

8. Aliiev, I. S. (2023). *Enerhetychni metody doslidzhen protsesiv obrobky metaliv tyskom* [Energy methods for studying metal forming processes]. DDMA. <http://dspace.dgma.donetsk.ua:8080/jspui/handle/DSEA/943>.
9. Hrudkina, N. S. (2021). *Rozvytok enerhetychnykh metodiv analizu tekhnolohichnykh rezhymiv ta udoskonalennia protsesiv tochnoho ob'iemnoho shtampuvannia vydavliuvanniam* [Development of energy methods for analyzing technological modes and improving precision bulk stamping processes by extrusion]. [Doctor's thesis, Donbas State Engineering Academy]. DDMA. https://uacademic.info/ua/document/0521U101565#google_vignette.
10. Hrudkina, N. S., & Aliieva, L. I. (2020). Modeling of cold extrusion processes using kinematic trapezoidal modules. *FME Transactions*, 48(2), 357–363. <https://doi.org/10.5937/fme2002357H>.
11. Hrudkina, N., Aliieva, L., Abhari, P., Kuznetsov, M., & Shevtsov, S. (2019). Derivation of engineering formulas in order to calculate energy-power parameters and a shape change in a semi-finished product in the process of combined extrusion. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(7(98)), 49–57. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.160585>.
12. Aliieva, L., Hrudkina, N., Aliiev, I., Zhibankov, I., & Markov, O. (2020). Effect of the tool geometry on the force mode of the combined radial-direct extrusion with compression. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(1(104)), 15–22. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.198433>.
13. Hrudkina, N. (2020). Osoblyvosti modeliuвання protsesiv radialno-pozdovzhnoho vydavliuvannia iz vykorystanniam trykutnykh kinematychnykh moduliv [Features of modeling in radial-longitudinal extrusion processes by using triangular kinematic modules]. *Visnyk Kremenchutskoho natsionalnoho universytetu imeni Mykhaila Ostrohradskoho - Bulletin of the Mykhailo Ostrohradskyyi Kropyvnytskyi National University*, 2(121), 110–115. <https://doi.org/10.30929/1995-0519.2020.2.110-115>.
14. Aliieva, L. Y., Hrudkyna, N. S., & Kriuhar, K. (2017). *Modelirovanie protsesa radialno-obratnogo vydavliuvaniya polykh detalei* [The simulation of radial-backward extrusion processes of hollow parts]. *Mechanics and Advanced Technologies*, 1(79), 91–99. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2017.79.95873>.
15. Vlasenko, K., Hrudkina, N., Reutova, I., & Chumak, O. (2018). Development of calculation schemes for the combined extrusion to predict the shape formation of axisymmetric parts with a flange. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(1(93)), 51–59. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.131766>.
16. Amini, A., Moslemi Naeni, H., Deilami Azodi, H., Talebi-Ghadikolaee, H., Badparva, H., & Zeinolabedin-Beygi, A. (2025). Hydro-mechanical deep drawing of conical components: Wrinkling behavior and process enhancement. *Journal of Engineering Research*, 13(2), 975–984. <https://doi.org/10.1016/j.jer.2024.04.005>.
17. Gorji, A., Alavi-Hashemi, H., Bakhshi-Jooybari, M., Nourouzi, S., & Hosseinipour, S. J. (2011). Investigation of hydrodynamic deep drawing for conical–cylindrical cups. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 56(9–12), 915–927. <https://doi.org/10.1007/s00170-011-3263-0>.
18. Thiruvarudchelvan, S., & Tan, M. J. (2004). The drawing of conical cups using an annular urethane pad. *Journal of Materials Processing Technology*, 147(2), 163–166. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2003.12.011>.
19. Shewakh, W. M., & Hassab-Allah, I. M. (2024). Finite element simulation and experimental verification of circular tube nosing through conical dies. *Applied Sciences*, 14(6), Article 2337. <https://doi.org/10.3390/app14062337>.
20. Han, Z. R., Fan, Z. J., Xiao, Y., & Jia, Z. (2017). A research on thickness distribution of oblique cone in dieless shear spinning. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 90(9–12), 2901–2912. <https://doi.org/10.1007/s00170-016-9565-5>.

Дата першого надходження статті до видання: 27.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 20.03.2026

Anton Hranovskyi¹, Volodymyr Levchenko², Vitalii Stankov³, Oleg Markov⁴

¹postgraduate student, Department of Metal Forming by Pressure
Donbass State Engineering Academy (Kramatorsk-Ternopil, Ukraine)
E-mail: anton.hranovskyi@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0006-1657-2232>

²PhD, Junior Researcher, Department of Radiowave Propagation in Natural Media,
O. Ya. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of National Academy of Sciences of Ukraine (Kharkiv, Ukraine)
E-mail: goldangel271@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-2411-4198>

³postgraduate student, Department of Automation of Industrial Processes
Donbass State Engineering Academy (Kramatorsk-Ternopil, Ukraine)
E-mail: stankov.vitali.78@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0009-0003-2126-9623>

⁴Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Automation of Industrial Processes
Donbass State Engineering Academy (Kramatorsk-Ternopil, Ukraine)
ResearcherID: [L-6561-2018](https://orcid.org/0009-0003-2126-9623). **Scopus Author ID:** [55648046800](https://orcid.org/0009-0003-2126-9623)

CALCULATION OF REDUCED PRESSURE IN DIRECT EXTRUSION OF PARTS WITH A CONICAL CAVITY BY THE ENERGY METHOD OF POWER BALANCE

The paper addresses direct extrusion of parts with a conical cavity, which is relevant for cold bulk forming because such geometry changes the material flow pattern and may increase the force loading of the tooling. The research problem is associated with the analytical determination of the force mode for this process by the energy method of power balance. The deformation zone is represented by three kinematically elementary zones with kinematically admissible velocity fields. For each zone, the strain-rate tensor components, the intensity of deformation rates, and power terms of plastic deformation, shear, and friction are determined.

The main methodological difficulty is related to the zone of conical-cavity formation. In this zone, the linear and shear components of the strain-rate tensor have complex dependences. Their combination under the square root in the expression for the intensity of deformation rates complicates the derivation of a compact analytical expression for the plastic-deformation power of this zone. Therefore, two variants for estimating this power term are considered. The first variant is an upper estimate based on the Cauchy–Schwarz (Cauchy–Bunyakovsky) inequality. The second variant is a linearized estimate based on the maximum absolute linear component of the strain-rate tensor. The validity of the linearized variant is additionally checked by separating the square of the intensity of deformation rates into the parts associated with the linear and shear components.

The analysis shows that the relative contribution of the shear component in the investigated parameter ranges is limited and is approximately 0.3–11 %. The angle of inclination of the conical surface is the main factor increasing this contribution, whereas an increase in the relative height of the forming zone and in the relative counter-punch radius does not increase the relative role of the shear component. The parametric analysis of the reduced pressure shows that both analytical variants reproduce the same qualitative trends with changes in the main geometric parameters. The quantitative difference between them becomes most pronounced for parameter combinations corresponding to a small relative clearance between the larger base of the conical cavity and the die wall. In this region, the Cauchy–Schwarz estimate becomes overly sensitive to the contribution of the third zone and may overestimate the reduced pressure.

The analytical results were compared with finite element simulation in QForm for ten representative cases. The linearized variant provided better agreement with finite element data: the mean absolute force error was 6.4 %, compared with 23.8 % for the Cauchy–Schwarz estimate. The median errors were 6.4 % and 12.2 %, respectively, and the maximum errors were 14.6 % and 72.5 %. The linearized variant gave a lower absolute error in 9 of 10 cases. The obtained results allow the linearized variant to be considered as a suitable engineering approach for estimating reduced pressure and extrusion force within the investigated parameter range, especially for geometries with a small relative clearance, i.e. for relatively thin-walled parts with a conical inner surface.

Keywords: energy method of power balance; kinematically admissible velocity field; reduced pressure; force mode; Cauchy–Schwarz inequality; linearized estimate; finite element method; cold bulk forming.

Fig.: 7. Tables: 2. References: 20.