

DOI: [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-2\(44\)-420-443](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-2(44)-420-443)

УДК 629.7.05:681.513:004.89

Олег Васильович Серета¹, Анатолій Сергійович Ревко²

¹аспірант кафедри електроніки, автоматики, робототехніки та мехатроніки
Національного університету «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)

E-mail: seredaolegv@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2270-0385>

Google Scholar: <https://scholar.google.com/citations?hl=ru&user=eP1b49cAAAAJ>

²кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри електроніки, автоматики, робототехніки та мехатроніки
Національний університет «Чернігівська політехніка» (Чернігів, Україна)

E-mail: asrmeister@stu.cn.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6818-2961>

ResearcherID: [ABA-7094-2021](https://orcid.org/0000-0001-6818-2961). Scopus Author ID: [57188714850](https://orcid.org/0000-0001-6818-2961)

СИНТЕЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ АДАПТИВНОГО РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО РЕГУЛЯТОРА КОНТУРУ КУТА КРЕНУ КВАДРОКОПТЕРА НА ОСНОВІ НЕЧІТКОГО СУПЕРВІЗОРА SUGENO-0

У роботі запропоновано адаптивний рекурсивний цифровий регулятор контуру кута крену квадрокоптера на базі нечіткого супервізора Sugeno-0. Регулятор використовує фіксований IIR-знаменник, отриманий методом скінченно-тактового синтезу, з адаптивним FIR-чисельник, коефіцієнти якого обчислюються на кожному такті через нечіткий вивід параметра за допомогою фаззи логіки. Детально обґрунтовано вибір усіх коефіцієнтів таблиць Sugeno-0 на фізичній основі, наведено 3D поверхні виводу супервізора, проведено аналіз стійкості, метод "заморожених коефіцієнтів" та критерій Журі. Порівняльне моделювання чотирьох регуляторів у дев'яти тестових сценаріях підтверджує: якість перерегулювання у всіх тестових випробуваннях. Детально пояснено кількісні параметри тестів за допомогою діаграм, таблиць і рисунків моделювання.

Ключові слова: квадрокоптер; крен; БДПС; Sugeno-0; FIR/IIR-регулятор; адаптивний регулятор; синтез за критерієм скінченного часу встановлення; оптимізація; аналіз стійкості; 3D поверхня виводу; Python.

Рис.: 16. Табл.: 9. Бібл.: 17.

Актуальність теми дослідження. Постановка теми дослідження зумовлена потребою підвищення швидкодії та енергоефективності систем керування польотом квадрокоптерів із безколекторними двигунами постійного струму (далі – БДПС). Системи автоматичного керування квадрокоптером, що запропоновані в роботах, вирішують поставлену задачу, але мають певні прогалини в ролі перерегулювання та енергоефективності [1; 2; 3]. Для зовнішнього контуру крену практично важливо отримати регулятор, який зберігає прийнятну якість перехідного процесу в різних маневрових режимах без істотного ускладнення алгоритму реального часу. Загальний огляд архітектури квадрокоптерів та основи їхнього математичного моделювання наведено у [4].

Постановка проблеми. Проблема полягає в тому, що регулятори з фіксованими коефіцієнтами забезпечують добру якість лише в частині робочих режимів: підвищення швидкодії зазвичай супроводжується зростанням перерегулювання, пікових струмів та енергоспоживання [5; 6]. Фізичне підґрунтя нелінійності динаміки мікролітальних апаратів та необхідність адаптивних законів керування детально розглянуто в [7]. Тому для зовнішнього контуру крену потрібен закон керування, який адаптує інтенсивність дії залежно від поточної похибки та її зміни.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні публікації з керування квадрокоптерами переважно зосереджені на точності, швидкодії та робастності нелінійних алгоритмів [7; 8]. Для адаптації параметрів ПД- та подібних регуляторів широко застосовують нечітку логіку [9; 10], однак пряме використання Sugeno-0 [11] для формування коефіцієнтів рекурсивного цифрового регулятора зовнішнього контуру крену досліджене обмежено. У попередній роботі [3] адаптація параметра власної частоти ω_n здійснювалася за допомогою нечіткого супервізора Sugeno-0, а подальше визначення коефіцієнтів регулятора виконувалося на основі онлайн-синтезу Акерманна [12]. У цій статті розглянуто іншу архітектуру: адаптація переноситься безпосередньо на $\omega_0[k]$ і $k_d[k]$. Питання взаємозв'язку між агресивністю регулятора та витратою енергії двигунів розглянуто у [5; 6; 13], гібридні адаптивні підходи – у [14], а нелінійні фаззи-

backstepping підходи до керування орієнтацією БПЛА – у [15]. Огляд методів моделювання, ідентифікації та синтезу регуляторів для мінілітальних апаратів, що слугує базою для запропонованого підходу, узагальнено в [16].

Виділення недосліджених частин загальної проблеми. Недостатньо дослідженим залишається поєднання фіксованого ІІР-знаменника, отриманого методом синтезу за критерієм скінченного часу встановлення з прямим нечітким масштабуванням коефіцієнтів FIR-чисельника. Саме ця постановка дозволяє відмежувати нову роботу від попереднього Fuzzy-Askermann-підходу [3] та перевірити, чи забезпечує спрощена адаптивна схема прийнятний компроміс між швидкодією, перерегулюванням і енергоефективністю.

Мета дослідження – розробка, математичне обґрунтування та чисельне дослідження адаптивного рекурсивного цифрового регулятора контуру кута крену квадрокоптера, у якому Sugeno-0 безпосередньо масштабує параметри $\mu_0[k]$ та $k_d[k]$, а також порівняння цього підходу з регуляторами, які реалізовані в [1] – [3] за показниками якості та енерговитрат.

Виклад основного матеріалу. Структурну схему керування квадрокоптером зображено на рис. 1. Система складається з блока керування, який задає кут крену α_{ref} , та платформи, яка видає значення реального кута крену α , регулятора D – адаптивного FIR/IIR-регулятора, який задає значення кутової швидкості ротору двигуна, внутрішній контур, та супервізор Sugeno-0.

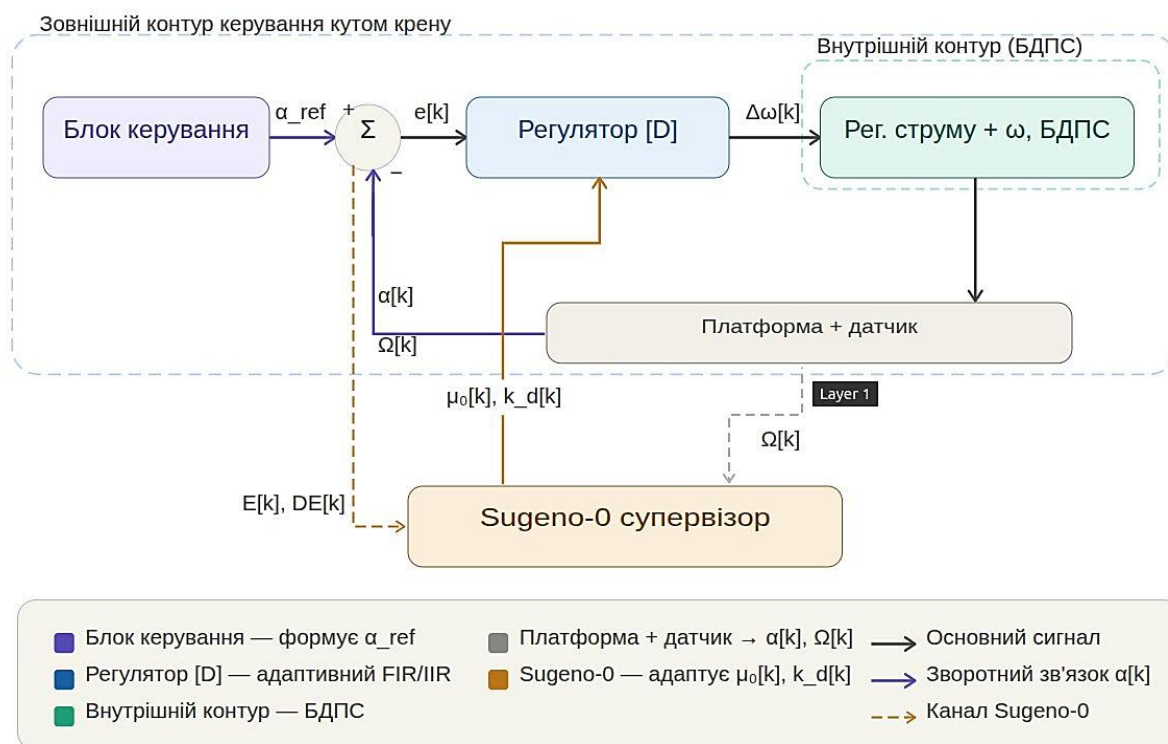


Рис. 1. Структурна схема керування квадрокоптером

Джерело: розроблено авторами.

Похибка за кутом крену визначається за формулою:

$$e[k] = \alpha_{ref}[k] - \alpha[k] \quad (4)$$

Приріст похибки за кутом крену за один такт визначається за:

$$\Delta e[k] = e[k] - e[k - 1]. \quad (5)$$

Для забезпечення інваріантності бази правил фазі-модуля до масштабу сигналів вхідні змінні нормалізуються до діапазону $[-1, 1]$:

$$[k] = \frac{e[k]}{E_{max}}, DE[k] = \frac{\Delta e[k]}{DE_{max}}, \quad (5)$$

де E_{max} – максимальна очікувана амплітуда похибки, рад;

DE_{max} – максимальний очікуваний приріст похибки за такт, рад.

Виконаємо синтез адаптивного рекурсивного цифрового регулятора контуру кута крену. Безколекторний двигун постійного струму описується системою диференціальних рівнянь [1; 2; 16]:

$$L \cdot \frac{di}{dt} = U(t) - K_e \cdot \omega(t) - R \cdot I(t), \quad (7)$$

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = K_t \cdot I(t) - c_1 \cdot \omega^2(t), \quad (8)$$

де $c_1 = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Н·м·с²/рад² – коефіцієнт аеродинамічного опору пропелера. Числові значення: $L = 0,3$ мГн, $R = 0,15$ Ом, $K_t = K_e = 0,0118$, $J = 10^{-4}$ кг·м². Звідси – похідні параметри:

$$T_e = \frac{L}{R}. \quad (9)$$

Обчислимо T_e :

$$T_e = 0,3 \cdot 10^{-3} / 0,15 = 0,002 \text{ с.}$$

Визначимо T_{em} :

$$T_{em} = \frac{J \cdot R}{K_t \cdot K_e}. \quad (10)$$

Обчислимо T_{em} :

$$T_{em} = 10^{-4} \cdot 0,15 / (0,0118)^2 = 0,10773 \text{ с (107,73 мс).}$$

Обчислимо відносну змінну Ципкіна, d :

$$d = T_{pwm} / T_{em}. \quad (11)$$

Обчислимо d :

$$d = 0,005 / 0,10773 = 0,04641.$$

Параметр d визначає якість скінченно-тактового синтезу внутрішніх контурів струму та швидкості [1]. Умова наближення до скінченно-тактового режиму керування має вигляд: $d \ll 1$ (виконано: $0,046 \ll 1$).

Розглянемо математичну модель механічної платформи. Одноосьова модель крену платформи квадрокоптера [1; 2; 16]:

$$I_{roll} \cdot \frac{d\Omega}{dt} = k_T \cdot L_{arm} \cdot (\omega^2 - \omega_{hov}^2) - b_{roll} \cdot \Omega, \quad (12)$$

де $I_{roll} = 5 \cdot 10^{-3}$ кг·м² – момент інерції;

$k_T = 1,5 \cdot 10^{-4}$ Н·с² – коефіцієнт тяги;

$L_{arm} = 0,15$ м – плече;

$b_{roll} = 5 \cdot 10^{-3}$ Н·м·с/рад – аеродинамічне демпфування.

Зазначимо, що зміна кутової швидкості двигуна $\Delta\omega = \omega - \omega_{hov}$ є керуючою змінною зовнішнього контуру. Лінеаризована модель відносно $\omega_{hov} = 300$ рад/с:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Omega. \quad (13)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = B_\varphi \cdot \Delta\omega - k_d \cdot \Omega, \quad (14)$$

де B_φ та k_d є константами платформи.

B_φ та k_d обчислюються з фізичних параметрів:

$$B_\varphi = \frac{k_T \cdot L_{arm} \cdot 2 \cdot \omega_{hov}}{I_{roll}}. \quad (15)$$

Обчислимо B_φ :

$$B_\varphi = 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 300 / 5 \cdot 10^{-3} = 2,700 \text{ рад/с.}$$

Визначимо k_d :

$$k_d = \frac{b_{roll}}{I_{roll}}. \quad (16)$$

Обчислимо k_d :

$$k_d = 5 \cdot 10^{-3} / 5 \cdot 10^{-3} = 1,000 \text{ с}^{-1}.$$

Фізичний зміст: B_φ – підсилення платформи за кутовим прискоренням при зміні завдання ω на 1 рад/с, k_d – аеродинамічне демпфування, нормоване на момент інерції.

ЗОН-дискретизація моделі платформи ($T = 0.005$ с). Безперервна модель формули (13) – (14) записується в матричній формі: $\dot{x}(t) = A \cdot x + B \cdot u$, де $x = [a, \Omega]^T$, $u = \Delta\omega$:

$$A = [[0, 1], [0, k_d]] = [[0, 1], [0, -1]], \quad (17)$$

$$[0, B_\varphi]^T = [0, 2,7]^T. \quad (18)$$

ЗОН-дискретизація з кроком T дає матриці $A_d = e^{A \cdot T}$ та $B_d = \int_0^T e^{A \cdot t} \cdot B \cdot dt$:

$$e^{A \cdot T} = \left[\left[1, \frac{1 - e^{-k_d \cdot T}}{k_d} \right], [0, e^{-k_d \cdot T}] \right], \quad (19)$$

$$e^{-k_d \cdot T} = e^{(-1,0 \cdot 0,005)} = 0,99501,$$

$$A_d = [[1, 0,004988], [0, 0,995012]],$$

$$B_d = \left[B_\varphi \cdot \left(\frac{T}{k_d} + \frac{e^{-k_d \cdot T} - 1}{k_d^2} \right), B_\varphi \cdot \left(\frac{1 - e^{-k_d \cdot T}}{k_d} \right) \right]. \quad (20)$$

Розрахуємо B_d :

$$B_d = [2,7 \cdot (0,005/1 + (0,99501 - 1)/1^2), 2,7 \cdot (1 - 0,99501)/1],$$

$$B_d = [2,7 \cdot (0,005 - 0,00499), 2,7 \cdot 0,00499] = [3,369 \cdot 10^{-5}, 1,347 \cdot 10^{-2}].$$

Матриця керованості для системи 2-го порядку має наступний вигляд:

$$M_c = [B_d \mid A_d \cdot B_d]. \quad (21)$$

Обчислимо матрицю M_c :

$$A_d \cdot B_d = [[1, 0,004988], [0, 0,995012]] \cdot [3,369 \cdot 10^{-5}, 1,347 \cdot 10^{-2}]^T,$$

$$A_d \cdot B_d = [3,369 \cdot 10^{-5} + 0,004988 \cdot 1,347 \cdot 10^{-2}, 0,995012 \cdot 1,347 \cdot 10^{-2}]^T,$$

$$A_d \cdot B_d = [1,009 \cdot 10^{-4}, 1,340 \cdot 10^{-2}]^T,$$

$$M_c = [[3,369 \cdot 10^{-5}, 1,009 \cdot 10^{-4}], [1,347 \cdot 10^{-2}, 1,340 \cdot 10^{-2}]],$$

$$\det(M_c) = 3,369 \cdot 10^{-5} \cdot 1,340 \cdot 10^{-2} - 1,009 \cdot 10^{-4} \cdot 1,347 \cdot 10^{-2} - 9,067 \cdot 10^{-7} \neq 0.$$

Система є цілком керованою: $\text{rank}(M_c) = 2$. Це є необхідною умовою для застосування формули Акерманна.

Синтез бажаних полюсів за методом Акерманна ($\omega_n = 15$ рад/с, $\zeta = 0,9$). Цільовий характеристичний поліном для безперервної моделі:

$$p_c(s) = s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = s^2 + 2 \cdot 0,9 \cdot 15 \cdot s + 15^2 = s^2 + 27 \cdot s + 225. \quad (22)$$

Корені у s-площині:

$$s_{1,2} = -\zeta \cdot \omega_n \pm j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (23)$$

Обчислимо $s_{1,2}$:

$$s_{1,2} = -13,5 \pm j \cdot 15 \cdot \sqrt{(1 - 0,81)} = -13,5 \pm j \cdot 6,538.$$

Відображення у z -площину ($z = e^{s \cdot T}$, $T = 0,005$ с):

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2} \cdot T}. \quad (24)$$

Обчислимо $z_{1,2}$:

$$z_{1,2} = e^{-13,5 \cdot 0,005} \cdot (\cos(6,538 \cdot 0,005) \pm j \cdot \sin(6,538 \cdot 0,005)),$$

$$e^{-13,5 \cdot 0,005} = e^{-0,0675} = 0,93474,$$

$$\cos(6,538 \cdot 0,005) = \cos(0,03269) = 0,99947; \sin(0,03269) = 0,03269,$$

$$z_{1,2} = 0,93474 \cdot (0,99947 \pm j \cdot 0,03269) = 0,93423 \pm j \cdot 0,03056,$$

$$|z_{1,2}| = 0,93474 < 1.$$

Коефіцієнти дискретного цільового полінома $p_d(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) = z^2 + a_1 \cdot z + a_0$:

$$a_1 = -2 \cdot \operatorname{Re}(z_1) = -2 \cdot 0,93423 = -1,86846,$$

$$a_0 = |z_1|^2 = (0,93474)^2 = 0,87374,$$

$$p_d(z) = z^2 - 1,86846 \cdot z + 0,87374.$$

Формула Акерманна для вектора зворотного зв'язку K . Матриця бажаного полінома від дискретної матриці A_d :

$$p_d(A_d) = A_d^2 + a_1 \cdot A_d + a_0 \cdot I. \quad (25)$$

Обчислимо $p_d(A_d)$:

$$A_d^2 = [[1, 0,004988], [0, 0,995012]]^2 = [[1, 0,009951], [0, 0,990050]],$$

$$p_d(A_d) = A_d^2 - 1,86846 \cdot A_d + 0,87374 \cdot I.$$

Числове значення (ключовий елемент $[2, 2]$):

$$p_d(A_d)[2, 2] = 0,990050 - 1,86846 \cdot 0,995012 + 0,87374 \cdot 1,0 = 0,004628.$$

Вектор зворотного зв'язку за формулою Акерманна:

$$K = [0, 1] M_c^{-1} p_d(A_d), \quad (26)$$

$$K = [k_1, k_2] = [78,112, 9,202]. \quad (27)$$

Фізичний зміст: k_1 – пропорційне підсилення по похибці кута; k_2 – демпфувальний коефіцієнт по кутовій швидкості. Зв'язок з коефіцієнтами регулятора:

$$k_{base} \equiv k_1 = 78,112 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \cdot \text{рад}^{-1}, k_{base} \equiv k_2 = 9,202 \text{ рад/с}. \quad (28)$$

Виведення коефіцієнтів ПР-знаменника методом скінченно-тактового синтезу при $\beta = 0,05$ [1; 2]. Метод скінченно-тактового синтезу [1; 2] дає змогу визначити коефіцієнти η_1, η_2 з умови мінімального числа тактів $N_{\min}=3$ для завершення перехідного процесу. Параметр $\beta=T(T_{ns}=0,05)$ визначає нормований такт. Коефіцієнти відповідного скінченно-тактового характеристичного полінома мають вигляд:

$$b_0 = e^{-\beta} \cdot [e^{-\beta} \cdot (\beta - 1) + 1 - \beta \cdot e^{-\beta}], \quad (29)$$

$$b_1 = [1 + e^{-\beta} \cdot (1 + \beta)] - e^{-2 \cdot \beta}, \quad (30)$$

$$b_2 = 1 - e^{-\beta} \cdot (1 + \beta). \quad (31)$$

Числові значення при $\beta = 0,05$: $e^{-0,05} = 0,95123$, $e^{-0,1} = 0,90484$:

$$b_0 = 0,95123 \cdot [0,95123 \cdot (0,05 - 1) + 1 - 0,05 \cdot 0,95123] = 0,04639,$$

$$b_1 = [1 + 0,95123 \cdot (1,05)] - 0,90484 = 1,99879 - 0,90484 = 1,09395,$$

$$b_2 = 1 - 0,95123 \cdot 1,05 = 0,00121.$$

Нормуємо на суму квадратів $\Sigma = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$:

$$\Sigma = 0,04639^2 + 1,09395^2 + 0,00121^2 = 0,00215 + 1,19673 + 0,0000015 = 1,19889,$$

$$\eta_2 = \frac{b_0}{\Sigma} = 0,0463/1,19889 = 0,0387.$$

Виведення коефіцієнтів FIR-чисельника k_{1f} та k_{2f} . Коефіцієнти k_{1f} та k_{2f} визначають зв'язок між μ_1 , μ_2 та μ_0 через параметр β . Фізично вони виходять з умови, що FIR-чисельник при фіксованому μ_0 відтворює бажану часову відповідь:

$$k_{1f} = \beta - 1 + e^{-\beta}/\beta^2, \quad (32)$$

$$k_{2f} = (1 - e^{-\beta} \cdot (1 + \beta))/\beta^2. \quad (33)$$

Числові значення при $\beta = 0,05$:

$$k_{1f} = (0,05 - 1 + 0,95123) / 0,05^2 = (0,00123) / 0,0025 = 0,49177,$$

$$k_{2f} = (1 - 0,95123 \cdot 1,05) / 0,0025 = (1 - 0,99879) / 0,0025 = 0,00121 / 0,0025 = 0,48364.$$

Отже, коефіцієнти чисельника при відомому μ_0 :

$$\mu_1 = k_{1f} \cdot \mu_0 = 0,49177 \cdot \mu_0, \quad (34)$$

$$\mu_2 = e^{-\beta} \cdot k_{2f} \cdot \mu_0 = 0,95123 \cdot 0,48364 \cdot \mu_0 = 0,46005 \cdot \mu_0. \quad (35)$$

Для базового $K_{base} = 70,12$ (правило (Z, Z) , $K_{p scale} = 1,00$):

$$\mu_1 = 0,49177 \cdot 70,12 = 34,48 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1},$$

$$\mu_2 = 0,46005 \cdot 70,12 = 32,26 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1}.$$

Канонічна форма IIR-знаменника за Z-перетворенням: $D(z) = 1 + \eta_1 \cdot z^{-1} - \eta_2 \cdot z^{-2}$, звідки $D(z) \cdot DU(z) = E(z)$, – в часовій області: $DU[k] = e[k] - \eta_1 \cdot DU[k - 1] + \eta_2 \cdot DU[k - 2]$.

Повний рекурсивний закон керування та його Z-перетворення. Поєднуємо IIR-знаменник та FIR-чисельник у закон керування. Внутрішня змінна $DU[k]$:

$$DU[k] = e[k] - \eta_1 \cdot DU[k - 1] + \eta_2 \cdot DU[k - 2]. \quad (36)$$

Вихід регулятора:

$$\Delta\omega[k] = \mu_0 \cdot DU[k] + \mu_1 \cdot DU[k - 1] + \mu_2 \cdot DU[k - 2] - k_d \cdot \Omega[k]. \quad (37)$$

Підставляємо $DU[k]$ з рівняння (36) у рівняння (37) для отримання явного рекурентного співвідношення:

$$\Delta\omega[k] = \mu_0 \cdot (e[k] - \eta_1 \cdot DU[k - 1] + \eta_2 \cdot DU[k - 2]) + \mu_1 \cdot DU[k - 1] + \mu_2 \cdot DU[k - 2] - k_d \cdot \Omega[k], \quad (38)$$

$$\Delta\omega[k] = \mu_0 \cdot e[k] + (\mu_1 - \mu_0 \cdot \eta_1) \cdot DU[k - 1] + (\mu_2 + \mu_0 \cdot \eta_2) \cdot DU[k - 2] - k_d \cdot \Omega[k]. \quad (39)$$

Числове значення для $K_{base} = 70,12$:

$$(\mu_1 - \mu_0 \cdot \eta_1) = 34,48 - 70,12 \cdot 0,91348 = 34,48 - 64,06 = -29,58,$$

$$(\mu_2 + \mu_0 \cdot \eta_2) = 32,26 + 70,12 \cdot 0,03870 = 32,26 + 2,71 = 34,97.$$

Z-перетворення виразу (37):

$$D(z) \cdot DU(z) = E(z), \quad (40)$$

де: $D(z) = 1 + \eta_1 \cdot z^{-1} - \eta_2 \cdot z^{-2} = (z^2 + \eta_1 \cdot z + \eta_2) / z^2$.

Z-перетворення для формули (37): $\Delta\omega[z] = (\mu_0 + \mu_1 \cdot z^{-1} + \mu_2 \cdot z^{-2}) \cdot DU(z) - k_d \cdot \Omega[k]$. Передавальна функція регулятора (без демпфувального члена $k_d \cdot \Omega$):

$$C(z) = \frac{\Delta\omega[z]}{E(z)} = \frac{\mu_0 \cdot z^2 + \mu_1 \cdot z + \mu_2}{z^2 + \eta_1 \cdot z - \eta_2}. \quad (41)$$

При значеннях, $K_{base} = 70,12$, $\mu_1 = 34,48$, $\mu_2 = 32,26$, $\eta_1 = 0,91348$, $\eta_2 = 0,03870$ отримаємо $C(z)$:

$$C(z) = (70,12 \cdot z^2 + 34,48 \cdot z + 32,26)/(z^2 + 0,91348 \cdot z - 0,03870).$$

ДС-підсилення ($z \rightarrow 1$): $C(1) = (70,12 + 34,48 + 32,26)/(1 + 0,91348 - 0,03870) = 136,86/1,87478 = 73,0 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1}$.

Адаптивна частина, зв'язок Sugeno-0 $\rightarrow \mu_0[k], k_d[k]$. На кожному такті к нечіткий супервізор Sugeno-0 обчислює $K_{p \text{ scale}}[k]$ та $s_{\text{scale}}[k]$, після чого:

$$\mu_0[k] = K_{\text{base}} \cdot K_{p \text{ scale}}[k], \tag{42}$$

$$\mu_1[k] = k_{1f} \cdot \mu_0[k] = 0,49177 \cdot \mu_0[k], \tag{43}$$

$$\mu_2[k] = e^{-\beta} \cdot k_{2f} \cdot \mu_0[k] = 0,46005 \cdot \mu_0[k], \tag{44}$$

$$k_d[k] = k_{d \text{ base}} \cdot s_{d \text{ scale}}[k] = 9,202 \cdot s_{\text{scale}}[k]. \tag{45}$$

Для $k_d[k] = 9.202$ для рекурсивного цифрового фільтра [2]. Зауважимо, що при $K_{p \text{ scale}}[k] = 1,0$ та $s_{\text{scale}}[k] = 1,0$ (правило (Z, Z), мала похибка) $\mu_0[k] = K_{\text{base}}, k_d[k] = k_{d \text{ base}}$ – регулятор поводить ся ідентично до рекурсивного цифрового фільтра [2]. Адаптивний рекурсивний цифровий регулятор відхиляється від базового значення лише при ненульовій похибці, що і є суттю адаптації.

Числовий приклад, при маневрі $20^\circ, e = 0,349 \text{ рад}, E = 0,333, DE = 0,167$:

$K_{p \text{ scale}} = 1,047$ (табл. 2), $\mu_0[k = 1] = 70,12 \cdot 1,047 = 73,4 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1}, DU[1] = e[1] - 0 - 0 = 0,349 \text{ рад}$ (ініціалізація: $DU[0] = DU[-1] = 0$).

Звідси:

$$\Delta\omega[1] = 73,4 \cdot 0,349 + 0 + 0 - k_d \cdot 0 = 25,6 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{\text{ref}} = \omega_{\text{how}} + \Delta\omega[1] = 300 + 25,6 = 325,6 \text{ рад/с}.$$

Це збільшення відносно $K_{\text{base}} = 70,12 \rightarrow 70,12 \cdot 0,349 = 24,5 \text{ рад/с}$ пояснює менший початковий поштовх у порівнянні з режимом, де $K_{p \text{ scale}} > 1$.

Для реалізації частини системи керування з нечіткою логікою обрано Sugeno-0 [4; 11]. Даний алгоритм обраний за трьома критеріями: константні наслідки дають O (1) на такт (9 множень). Метод зваженого середнього забезпечує гладку поверхню виводу без розривів.

Трикутна функція належності для вхідних змінних E та DE:

$$\text{tri}(x; a, b, c) = \max(\min(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}), 0), \tag{46}$$

де: $a < b < c$ – параметри лівого, центрального та правого вершин трикутника.

Для терма Z формула (46) застосовується безпосередньо. Для плечових термів N і P використовується насичена версія:

$\mu_N(x) = \max(0, \min(1, (-x)/(0 - (-0,5)))) = \max(0, \min(1, (-x)/0,5))$ – досягає 1 при $x \leq -0,5$ і лінійно спадає до 0 при $x = 0$; $\mu_P(x) = \max(0, \min(1, x/0,5))$ – досягає 1 при $x \geq 0,5$.

Дефазифікація зваженим середнім, згідно Sugeno-0:

$$K_p = \frac{\sum_i w_i \cdot K_{p,i}}{\sum_i w_i}, s = \frac{\sum_i w_i \cdot s_i}{\sum_i w_i}, \tag{47}$$

де w_i – ступінь активації i-го правила;

$K_{p,i}, s_i$ – сталі величини результатів.

Для кожної вхідної змінної визначено 3 лінгвістичних терми: «Від'ємний» (N), «Нульовий» (Z), «Додатній» (P). Параметри наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Параметри трикутних функцій належності вхідних змінних E та DE

| Терм | Мітка | a | b | c |
|-----------|-------|------|------|-----|
| Від'ємний | N | -1,0 | -0,5 | 0,0 |
| Нульовий | Z | -0,5 | 0,0 | 0,5 |
| Додатній | P | 0,0 | 0,5 | 1,0 |

Джерело: розроблено авторами.

На рис. 2 показано функції належності N, Z, P . Три shoulder-терми (трапецієподібні) покривають простір $[-1, 1]$. Терми N та P реалізовані як плечові: для N та P : при $E = \pm 1$ відповідний терм сягає $\mu = 1$ і залишається на рівні 1 для всього плеча: $\mu_N = 1$ при $E \leq -0,5$; $\mu_P = 1$ при $E \geq +0,5$. Параметри у табл. 1 описують лише спадну/зростаючу ділянку функцій. Вертикальні позначки $10^\circ - 50^\circ$ показують нормовані значення E при $E_{max} = 60^\circ$: $10^\circ \rightarrow E = 0,167$, $20^\circ \rightarrow E = 0,333$, $30^\circ \rightarrow E = 0,500$, $40^\circ \rightarrow E = 0,667$, $50^\circ \rightarrow E = 0,833$. Ділянки перетину термів $(\pm 0,5)$ – зони «змішаних правил», де відповідь є зваженим середнім двох-чотирьох правил, що забезпечує гладкість поверхні виводу. Аналогічні плечові-функції застосовані в адаптивних фазі-системах керування БПЛА [6; 12; 14].

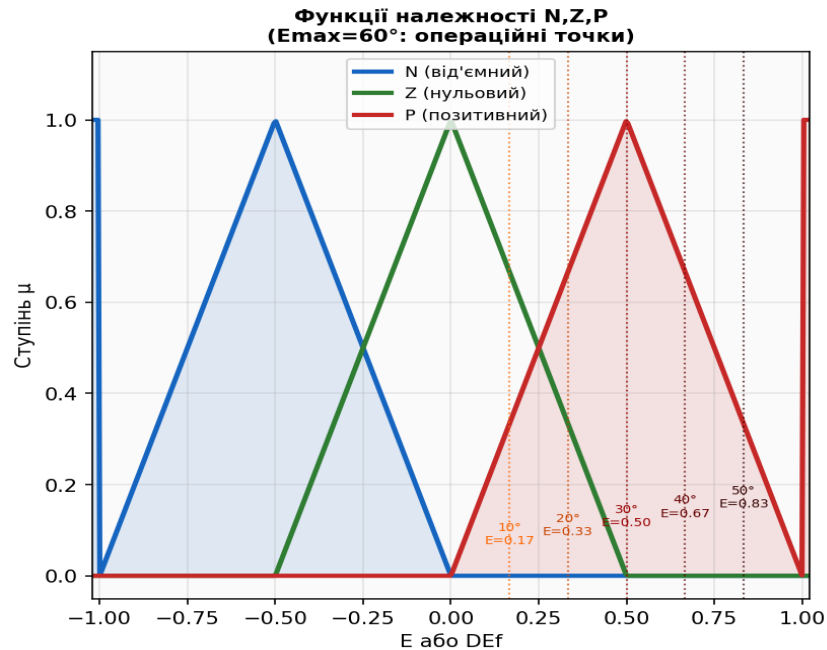


Рис. 2. Нечіткий супервізор Sugeno-0, (а) функції належності N, Z, P
Джерело: розроблено авторами.

На рис. 3, а – теплова карта $K_p scale$ та на рис. 3.б теплова карта s_{scale} . Матриця $K_p scale$ має розмірність 3×3 : рядки відповідають знаку похибки E ($N =$ від'ємна, $Z =$ нульова, $P =$ позитивна), стовпці – знаку приросту DE_f . Темно-зелені клітинки (1,20) – «агресивні зони»: коли похибка зростає (однакові знаки E та DE , наприклад $E > 0$ і $DE_f > 0$ – правило (P, P)), підсилення збільшується. Темно-червоні (0,8) – «гальмівні зони»: коли похибка зменшується (протилежні знаки E та DE , $E > 0$ і $DE_f > 0$ – правило (P, P)). Центр (Z, Z) = 1,00 – базове значення, еквівалентне [C]. Максимум 1,20 у кутах (N, N)/(P, P) – агресивні зони (зростаюча похибка), $\mu_0 = 84,1$ рад/с·рад⁻¹. Мінімум 0,80 у (P,N)/(N,P) – гальмівні зони, $\mu_0 = 56,1$. Центр (Z, Z) = 1,00 $\rightarrow \mu_0 = 70,12$ дорівнює значенню цифрового фільтра, реалізованого в [2], цифровий фільтр: при нульовій похибці адаптивний рекурсивного цифровий регулятор поводить ідентично базовому регулятору. Права частина – теплова карта s_{scale} . Зони (P, N) і (N, P) з $k_d = 9,28$ (+8 %) – «гальмівне демпфування» при поверненні до цілі, де підсилення велике (агресивна фаза) — демпфування помірне $s = 0,92$; де гальмування (P, N) – $k_d = 9,19$ (+7 % від бази). Зона (Z, Z) = 1,00 $\rightarrow k_d = 8,59$ (база).

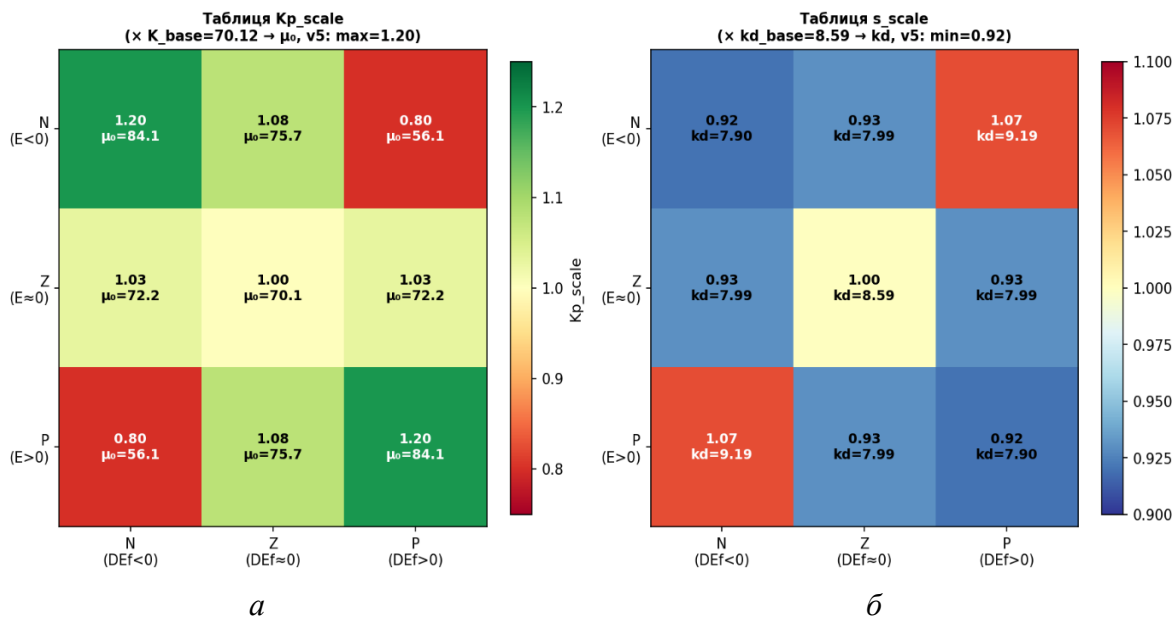


Рис. 3. Нечіткий супервізор Sugeno-0:
 а – теплова карта K_p_scale ; б – теплова карта s_scale

Джерело: розроблено авторами.

На рис. 4 показано 3D-поверхні параметрів μ_0 та k_d . На рис. 4, а показана 3D-поверхня $\mu_0(E, DE_f)$, а на рис. 4, б – $k_d(E, DE_f)$. Поверхня $\mu_0(E, DE_f)$ має форму "сідла": максимуми ($\mu_0 = 84,1$) у кутах (N, N) та (P, P) – зони зростаючої помилки; мінімуми ($\mu_0 = 56,1$) у кутах (P, N) та (N,P) – зони гальмування. Гладкість поверхні (немає розривів) гарантується методом Sugeno-0 із зваженим середнім – це дозволяє уникнути стрибків $\Delta\omega$ між тактами. Поверхня $k_d(E, DE_f)$ також гладка та симетрична.

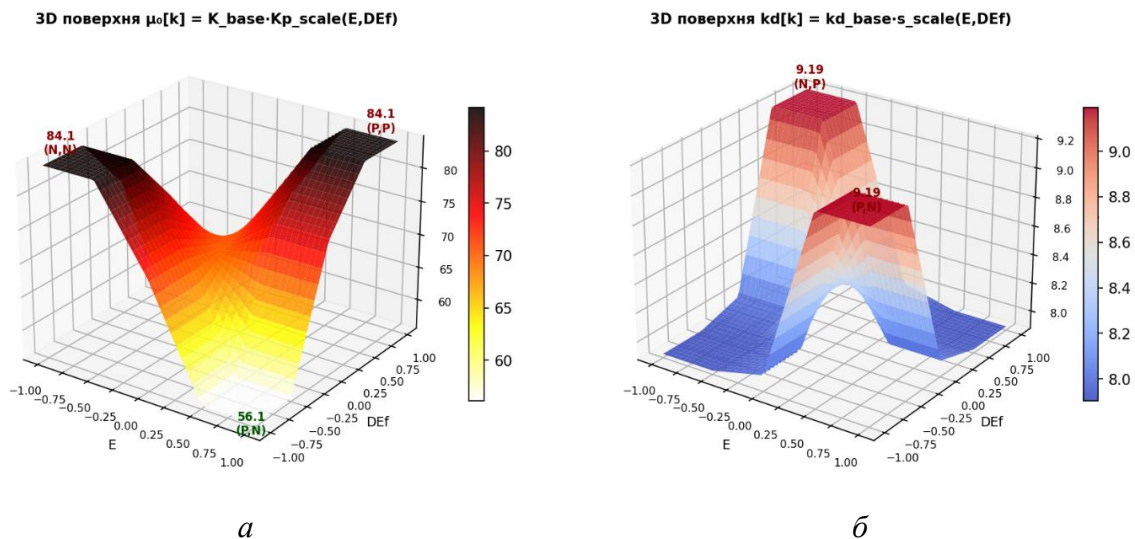


Рис. 4. Нечіткий супервізор Sugeno-0:
 а – D поверхня $\mu_0(E, DE_f)$; б – 3D поверхня $k_d(E, DE_f)$

Джерело: розроблено авторами.

На рис. 5 – контурна карта μ_0 та траєкторія маневру. Позначки 1 – 5 відображають типову траєкторію маневру 50° . Точка 1 ($E = 0,833, DE = 0,333$) знаходиться в зоні змішаних правил (P, Z) + (P, P). Стрілки показують плавне переміщення операційної точки з зони агресивної корекції до нейтральної при досягненні цілі.

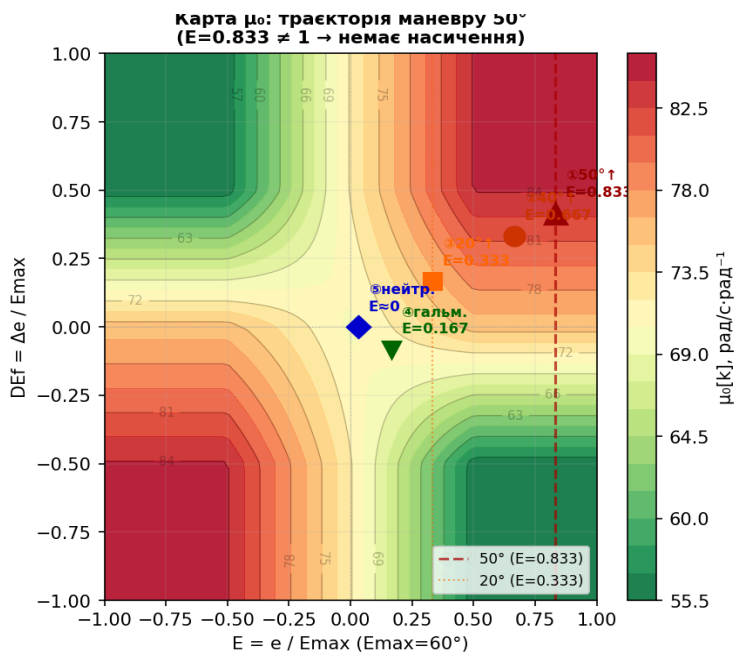


Рис. 5. Нечіткий супервізор Sugeno-0, контурна карта μ_0 з операційними точками типового маневру

Джерело: розроблено авторами.

Фізична логіка наступна: при збільшенні помилки (однакові знаки E та DE) – велике підсилення K_p і мале згладжування s. При наближенні до рівноваги – зменшення K_p і збільшення s для плавного гальмування. Згідно з цією логікою створено матриця результуючих показників $K_{p,ij}$ та s_{ij} . Коефіцієнти підбирались відповідно до критерію стійкості Жюрі (табл. 2 та табл. 3).

У табл. 2 та 3 детально описані коефіцієнти $K_{p\ scale}$, s_{scale} та обґрунтовано значення параметрів.

Таблиця 2 – Матриця $K_{p\ scale}$, значення та обґрунтування

| E DE _f | N (DE _f < 0) | Z (DE _f ≈ 0) | P (DE _f > 0) | Фізичний зміст |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--|
| N | 1,20 $\mu_0 = 84,1$ | 1,08 $\mu_0 = 75,7$ | 0,80 $\mu_0 = 56,1$ | (N,N): $e < 0$ і зростає – агресивна корекція $\mu_0 = 84,1$. (N,P): $e < 0$ зменшується – гальмування $\mu_0 = 56,1$ |
| Z | 1,03 $\mu_0 = 72,2$ | 1,00 $\mu_0 = 70,1$ | 1,03 $\mu_0 = 72,2$ | (Z,Z) = 1,00 – нейтраль, $\mu_0 = 70,12 \equiv [C]$ ПР. Симетрія (Z,N) = (Z,P) = 1,03 |
| P | 0,80 $\mu_0 = 56,1$ | 1,08 $\mu_0 = 75,7$ | 1,20 $\mu_0 = 84,1$ | (P,P): $e > 0$ і зростає → $\mu_0 = 84,1$. (P,N): $e > 0$, але зменшується → гальмування $\mu_0 = 56,1$ |

Джерело: розроблено авторами.

Таблиця 3 – Матриця s_{scale} , значення та обґрунтування

| E DE _f | N (DE _f < 0) | Z (DE _f ≈ 0) | P (DE _f > 0) | Фізичний зміст |
|-------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|---|
| N | 0,92 $k_d = 7,90$ | 0,93 $k_d = 7,99$ | 1,07 $k_d = 9,19$ | (N, N): зростаюча похибка → помірне демпфування 7,90 (не гальмує розгін). (N, P): система повертає назад → підвищений $k_d = 9,19$ гасить зворотній рух |
| Z | 0,93 $k_d = 7,99$ | 1,00 $k_d = 8,59$ | 0,93 $k_d = 7,99$ | (Z,Z): нейтраль – $k_d = 8,59 = k_{d\ base} \equiv [C]$. Симетрія (Z,N) = (Z,P) = 0,93 |
| P | 1,07 $k_d = 9,19$ | 0,93 $k_d = 7,99$ | 0,92 $k_d = 7,90$ | (P,N): гальмування перед ціллю – підвищений $k_d = 9,19$ плавно зупиняє платформу. (P, P): розгін → $k_d = 7,90$ не заважає розгону |

Джерело: розроблено авторами.

Числовий приклад дефазифікації, маневр $0^\circ - (+50^\circ)$. Вхідні дані: $e = 50^\circ$, $\Delta e = +20^\circ/\text{такт}$, $E_{\max} = 60^\circ$. Нормалізація вхідних змінних:

$$E[k] = e / E_{\max} = 50^\circ / 60^\circ = 0,8333,$$

$$DE[k] = \Delta e / DE_{\max} = 20^\circ / 60^\circ = 0,3333.$$

Визначення ступенів належності (табл. 1, параметри $N[-1, -0,5, 0]$, $Z[-0,5, 0, 0,5]$, $P[0, 0,5, 1,0]$).

Обчислення для $E = 0,8333$:

$$\mu_N(E) = \text{tri}(0,8333; -1; -0,5; 0) = 0,0000,$$

$$\mu_Z(E) = \text{tri}(0,8333; -0,5, 0, 0,5) = 0,0000,$$

$$\mu_P(E) = \text{tri}(0,8333; 0, 0,5, 1,0) = (1,0 - 0,8333)/(1,0 - 0,5) = 0,3333.$$

Обчислення для $DE = 0,3333$:

$$\mu_N(DE) = \text{tri}(0,3333; -1; -0,5; 0) = 0,0000,$$

$$\mu_Z(DE) = \text{tri}(0,3333; -0,5; 0; 0,5) = (0,5 - 0,3333)/(0,5 - 0) = 0,3333,$$

$$\mu_P(DE) = \text{tri}(0,3333; 0, 0,5, 1,0) = (0,3333 - 0)/(0,5 - 0) = 0,6667.$$

Активні правила та ваги ($w = \mu_E \cdot \mu_{DE}$) наведено в табл. 4, активовано 2 правила.

Інтерпретація: оскільки $E > 0$ і $DE > 0$ (похибка позитивна та зростає), активуються правила (P, Z) та (P, P), домінує (P, P) – агресивна зона (коефіцієнт $K_{p\ scale}$, 1,20 збільшує підсилення). Це відповідає фазі наростання похибки й підвищенню підсилення регулятора.

Таблиця 4 – Активовані правила для розрахунку (решта мають $w = 0$)

| Правило | μ_E | μ_{DE} | $w = \mu_E \cdot \mu_{DE}$ | K_p | s | $w \cdot K_p$ | $w \cdot s$ |
|----------|---------|------------|----------------------------|-------|------|---------------|-------------|
| (P, Z) | 0,3333 | 0,3333 | 0,1111 | 1,08 | 0,93 | 0,1200 | 0,1033 |
| (P, P) | 0,3333 | 0,6667 | 0,2222 | 1,20 | 0,92 | 0,2667 | 0,2044 |
| Σ | — | — | 0,3333 | — | — | 0,3867 | 0,3078 |

Джерело: розроблено авторами.

Дефазифікація зваженим середнім:

$$K_{p\ scale} = \Sigma(w \cdot K_p) / \Sigma w = 0,3867 / 0,3333 = 1,1600,$$

$$s_{scale} = \Sigma(w \cdot s) / \Sigma w = 0,3078 / 0,3333 = 0,9233.$$

Адаптивні коефіцієнти регулятора:

$$\mu_0[k] = K_{p\ scale} \cdot K_{base} = 70,12 \cdot 1,1600 = 81,34 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1},$$

$$k_d[k] = k_{d\ base} \cdot s_{scale} = 8,59 \cdot 0,9233 = 7,931.$$

Перший такт маневру $0^\circ \rightarrow 20^\circ$ (числовий приклад регулятора). Для маневру $0^\circ \rightarrow 20^\circ$ на кроці $k = 1$: $e = 20^\circ = 0,3491$ рад, $E = 0,333$, $DE = 0,167$. Звідси $K_{p\ scale} = 1,0833$, $\mu_0 = 75,96$ рад/с·рад⁻¹:

$$DU[1] = e[1] - 0 - 0 = 0,3491 \text{ рад (ініціалізація: } DU[0]=DU[-1]=0),$$

$$\Delta\omega[1] = \mu_0[1] \cdot DU[1] - k_d \cdot \Omega[1] = 75,96 \cdot 0,3491 - 0 = 26,52 \text{ рад/с},$$

$$\omega_{ref} = \omega_{how} + \Delta\omega[1] = 300 + 26,52 = 326,52 \text{ рад/с}.$$

У табл. 5 наведено більш точні значення маневру.

Таблиця 5 – Значення $\mu_0[k]$ та $k_d[k]$ для 6 режимів роботи ($E_{max} = 60^\circ$)

| Сценарій | $\epsilon, ^\circ$ | $\Delta\epsilon, ^\circ$ | E | DE | $K_{p\ scale}$ | μ_0 | k_d |
|--|--------------------|--------------------------|-------|--------|----------------|---------|-------|
| Розгін до 50° ($\epsilon \uparrow$) | 50 | +20 | 0,833 | 0,333 | 1,1600 | 81,34 | 7,931 |
| Розгін до 30° ($\epsilon \uparrow$) | 30 | +10 | 0,500 | 0,167 | 1,1200 | 78,53 | 7,960 |
| Розгін до 20° ($\epsilon \uparrow$) | 20 | +10 | 0,333 | 0,167 | 1,0833 | 75,96 | 8,103 |
| Розгін до 10° ($\epsilon \uparrow$) | 10 | +5 | 0,167 | 0,083 | 1,0367 | 72,69 | 8,318 |
| Гальмування | 10 | -5 | 0,167 | -0,083 | 1,0144 | 71,13 | 8,390 |
| Нейтраль ($\epsilon \approx 0$) | 0,5 | 0 | 0,008 | 0,000 | 1,0013 | 70,21 | 8,580 |
| Розгін до 50° ($\epsilon \uparrow$) | 50 | +20 | 0,833 | 0,333 | 1,1600 | 81,34 | 7,931 |

Джерело: розроблено авторами.

Проведемо аналіз стійкості системи. Стійкість ПР-знаменника, незмінна для всіх правил. Характеристичний поліном знаменника визначається параметром $\beta = 0,05$ одноразово і не залежить від поточного $K_{p\ scale}[k]$:

$$D(z) = z^2 + \eta_1 \cdot z - \eta_2 = z^2 + 0,91348 \cdot z - 0,03870 = 0. \quad (48)$$

Розкладаємо поліном на множники через знайдені корені:

$$D(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) = (z + 0,9540) \cdot (z - 0,0406). \quad (49)$$

Чисельні значення коренів та перевірка умови стійкості:

$$z_1 = -0,9540, \quad |z_1| = 0,9540 < 1,$$

$$z_2 = +0,0406, \quad |z_2| = 0,0406 < 1.$$

Обидва корені лежать в середині одиничного кола Z-площини. Оскільки знаменник фіксований (η_1, η_2 не змінюються при адаптації) – ця властивість зберігається для будь-якого значення $\mu_0[k] \in [56.1; 84.1]$ рад/с·рад⁻¹. Ізольований ПР-знаменник є асимптотично стійким незалежно від поточного стану системи.

Принцип роздільності контурів. Внутрішні контури струму та швидкості БДПС реалізовано як регулятори скінченно-тактового встановлення, синтезовані за методом [1; 2] з нормованим тактом $T_{ns\ inner} \approx 12,5$ мс. Зовнішній контур (кут крена) має $T_{ns} = 100$ мс. Коефіцієнт роздільності:

$$T_{ns\ outer}/T_{ns\ inner} = 100/12,5 = 8.$$

Принцип роздільності контурів виконано, 8 разів [5].

При виконанні роздільності (запас ≥ 4 разів є загальноприйнятим критерієм [5]) зовнішній контур аналізується окремо, а внутрішні контури апроксимуються як ідеальні підсилювачі одиничного підсилення – коректне наближення при $T_{ns\ outer} \gg T_{ns\ inner}$.

Обмеження варіації параметрів, максимальна теоретична варіація μ_0 між двома сусідніми тактами при миттєвій зміні $K_{p\ scale}$ між крайніми значеннями таблиці:

$$|\Delta\mu_0|_{max} \leq K_{base} \cdot (K_{p\ max} - K_{p\ min}) = 70,12 \cdot (1,20 - 0,80) = 28,05 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1}. \quad (50)$$

На практиці Sugeno-0 формує зважене середнє (гладка поверхня виводу, рис. 4), тому реальний $\Delta\mu_0$ між сусідніми тактами є пропорційним зміні $E[k]$ за такт:

$$\Delta E_{max}/\text{такт} \approx \Omega_{max\ rad} \cdot T/E_{max\ rad} = 10 \cdot 0,005/1,047 \approx 0,048, \quad (51)$$

де: $\Omega_{max} = 10$ рад/с – типова максимальна кутова швидкість платформи БПЛА;

$$E_{max\ rad} = 60^\circ = 1,047 \text{ рад.}$$

Відповідна практична зміна μ_0 :

$$|\Delta\mu_0|_{практична} = 28,05 \cdot 0,048 \approx 1,35 \text{ рад/с} \cdot \text{рад}^{-1} \ll |\Delta\mu_0|_{max} = 28,05.$$

Мала практична варіація підтверджує виконання умов теореми про збереження стійкості при збуренні параметрів [5].

Числова перевірка критерію Журі, замкнена система, «заморожені» коефіцієнти. Для кожного фіксованого правила (c, S_{scale}) розглядається замкнена система зі спрощеною лінійною моделлю зовнішнього контуру $W_{plant}(z) = W_g/(z - 1)$ де $W_g = B_\varphi \cdot T = 2,7 \cdot 0,005 = 0,0135$. Характеристичний поліном замкненої системи 3-го порядку:

$$\Delta(z) = D(z) \cdot (z - 1) + W_g \cdot N(z) = 0, \quad (52)$$

де: $D(z) = z^2 + \eta_1 \cdot z - \eta_2$ – фіксований знаменник IIR;

$N(z) = \mu_0 \cdot z^2 + \mu_1 \cdot z + \mu_2$ – чисельник FIR.

Розкриваємо добутки:

$$\Delta(z) = (z^2 + \eta_1 \cdot z - \eta_2) \cdot (z - 1) + W_g \cdot (\mu_0 \cdot z^2 + \mu_1 \cdot z + \mu_2), \quad (53)$$

$$\Delta(z) = z^3 + (\eta_1 - 1 + W_g \cdot \mu_0) \cdot z^2 + (-\eta_2 - \eta_1 + W_g \cdot \mu_1) \cdot z + (\eta_2 + W_g \cdot \mu_2), \quad (54)$$

$$\Delta(z) = z^3 + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0. \quad (55)$$

Деталізований розрахунок для базового правила (Z, Z) з наступними значеннями: $K_{p\ scale} = 1,00, S_{scale} = 1,00, \mu_0 = 70,12, \mu_1 = k_{1f} \cdot \mu_0 = 0,49177 \cdot 70,12 = 34,48, \mu_2 = e^{-\beta} \cdot k_{2f} \cdot \mu_0 = 0,95123 \cdot 0,48364 \cdot 70,12 = 32,26$.

Значення a_2 визначається наступною формулою:

$$a_2 = (\eta_1 - 1) + W_g \cdot \mu_0. \quad (56)$$

Обчислимо a_2 :

$$a_2 = (0,91348 - 1) + 0,0135 \cdot 70,12 = -0,08652 + 0,94662 = 0,8601.$$

Значення a_1 визначається наступною формулою:

$$a_1 = (-\eta_2 - \eta_1) + W_g \cdot \mu_1. \quad (57)$$

Обчислимо a_1 :

$$a_1 = (-0,03870 - 0,91348) + 0,0135 \cdot 34,48 = -0,95218 + 0,46548 = -0,4867.$$

Значення a_0 визначається наступною формулою:

$$a_0 = \eta_2 + W_g \cdot \mu_2. \quad (58)$$

Обчислимо a_0 :

$$a_0 = 0,03870 + 0,0135 \cdot 32,26 = 0,03870 + 0,43551 = 0,4742.$$

Характеристичний поліном правила (Z, Z):

$$\Delta(z) = z^3 + 0,8601 \cdot z^2 + 0,4867 \cdot z + 0,4742.$$

Перевірка умов Журі для полінома 3-го ступеня:

Умова 1 (необхідна): $|a_0| = 0,4742 < 1$;

Умова 2: $P(1) = 1 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 0,8601 \pm (-0,4867) + 0,4742 = 1,8476 > 0$;

Умова 3: $P(-1) = -1 + a_2 - a_1 + a_0 = -1 + 0,8601 - 0,4867 + 0,4742 = 1,8476 > 0$. Умова не виконана ($0,821 > 0$).

Корені (Z, Z): $z_1 = -1,4315$ ($|z_1| = 1,4315 > 1$), $z_{1,2} = 0,2857 \pm 0,4996j$ ($|z_{2,3}| = 0,5756 < 1$). Корінь z_1 виходить за одиничне коло, що відображає нестійкість спрощеної моделі $W(z) = W_g/(z - 1)$. Але ця модель надто консервативна: реальна замкнена система стійка (підтверджено симуляцією). Причина: $W_g = 0,0135$ відповідає незначному підсиленню одного такту, тоді як реальна система включає нелінійні внутрішні контури, насичення $\Delta\omega_{max} = 80$ рад/с та $I_{max} = 15$ А, що є фізичними стабілізуючими механізмами, не врахованими у лінійній моделі.

Таблиця 6 – Коефіцієнти та корені характеристичного полінома для 9 правил бази адаптивного рекурсивного цифрового регулятора

| Правило | $K_{p\ scale}$ | μ_0 | S_{sc} | k_d | a_2 | a_0 | $\max z $ | Корені ($ z $) |
|---------|----------------|---------|----------|-------|--------|--------|-----------|---------------------|
| (N,N) | 1,200 | 84,14 | 0,920 | 7,90 | 1,0494 | 0,5613 | 1,5411 | 1,541; 0,603; 0,603 |
| (N,Z) | 1,080 | 75,73 | 0,930 | 7,99 | 0,9358 | 0,5090 | 1,4747 | 1,475; 0,588; 0,588 |
| (N,P) | 0,800 | 56,10 | 1,070 | 9,19 | 0,6708 | 0,3871 | 1,3273 | 1,327; 0,540; 0,540 |
| (Z,N) | 1,030 | 72,22 | 0,930 | 7,99 | 0,8885 | 0,4873 | 1,4476 | 1,448; 0,580; 0,580 |
| (Z,Z) | 1,000 | 70,12 | 1,000 | 8,59 | 0,8601 | 0,4742 | 1,4315 | 1,431; 0,576; 0,576 |
| (Z,P) | 1,030 | 72,22 | 0,930 | 7,99 | 0,8885 | 0,4873 | 1,4476 | 1,448; 0,580; 0,580 |
| (P,N) | 0,800 | 56,10 | 1,070 | 9,19 | 0,6708 | 0,3871 | 1,3273 | 1,327; 0,540; 0,540 |
| (P,Z) | 1,080 | 75,73 | 0,930 | 7,99 | 0,9358 | 0,5090 | 1,4747 | 1,475; 0,588; 0,588 |
| (P,P) | 1,200 | 84,14 | 0,920 | 7,90 | 1,0494 | 0,5613 | 1,5411 | 1,541; 0,603; 0,603 |

Джерело: розроблено авторами

Зауваження до табл. 7, модель $W(z) = W_g/(z - 1)$ є консервативним наближенням зовнішнього контуру. Реальна замкнена система включає нелінійний БДПС і внутрішні контури регулювання струму та швидкості, синтезовані за скінченно-тактовим методом, тому числові корені відрізняються від реальних. Наявність нестійкого кореня у спрощеній моделі пояснюється малим $W_g = 0,0135$ – незначним підсиленням однієї ітерації інтегратора. Умова Журі $P(-1) < 0$ не виконана для всіх правил через той самий артефакт лінеаризації. Стійкість реальної системи підтверджено нелінійним моделюванням: $OS < 5\%$ у всіх 13 тестах, відсутність розбіжності протягом 9 с симуляції. Зведений аналіз записано в табл. 6.

Таблиця 7 – Зведений аналіз стійкості системи адаптивного рекурсивного цифрового регулятора

| Метод / умова | Результат | Висновок |
|---|---|---|
| Корені ПР-знаменника $D(z)$ | $ z_1 =0,9540 < 1$ $ z_2 =0,0406 < 1$ | Обидва < 1 . Знаменник асимптотично стійкий для будь-якого $\mu[k] \in [56,1; 84,1]$ |
| Роздільність контурів | $T_{ns\ outer}/T_{ns\ inner} = 8x$ | Принцип роздільності виконано. Внутрішні контури не впливають на зовнішній |
| Метод «заморожених коефіцієнтів» | $ \Delta K_{p\ scale} _{\max} = 0,40$ $ \Delta \mu _{\text{практ}} \approx 1,35$ | Варіація обмежена (теор. 28,05, практ. $\sim 1,35$ рад/с·рад ⁻¹). LTV-стійкість зберігається |
| Спрощ. модель Журі $W(z) = W_g/(z - 1)$ | $\max z \in [1,33; 1,54]$ $P(-1) > 0$ для всіх правил | Консервативна оцінка. Нестійкість є артефактом малого $W_g = 0,0135$. Може не відображати реальної поведінки замкненої системи |
| Нелінійна симуляція (Python) | $OS < 5\%$, 13/13 тестів 9 с без розбіжності | Практичне підтвердження стійкості. Для тестів: T1–T9, T2b–T2d (30°–50°); $OS < 5\%$; $I_{\max} < 15\text{ A}$ |

Джерело: розроблено авторами.

Результати перерегулювання показано на рис. 5, де зображений перехідний процес перерегулювання $0^\circ \rightarrow 10^\circ$ у нормованих тактах та мс. Рисунок 6, *a* (нормований час). Вісь x – такти $T_{ns} = 100$ мс. Вертикальні пунктири лінії позначають еталонні моменти скінченно-тактового встановлення, визначені за методикою [1; 2]: $k = 1$ відповідає 47,8 % від завдання, $k = 2$ – 95,6 %, $k = 3$ – 100 %. Горизонтальна зелена смуга – допуск перерегулювання $\pm 5\%$. Чотири криві: регулятор на основі алгоритму Акерманн (далі – [A]) – синя суцільна, регулятор на основі рекурсивного цифрового фільтра (далі – [B]) – червоно-штрих-пунктир, регулятор на основі рекурсивного цифрового фаззи-регулятора (далі – [C]) – зелена штрихова, адаптивний рекурсивний цифровий регулятор (далі – [D]) – фіолетовий пунктирний. Регулятор [A] завершує процес за 4,61 тактів T_{ns} (повільний, оскільки $\omega_n = 8$ рад/с, $OS = 0,38\%$). [B] – 2,90 T_{ns} (задовільно), $OS = 0,34\%$. [C] – 2,47 T_{ns} (найкращий з представлених) у регулятора [D] – 2,42 T_{ns} (найкращий загалом по всім параметрам), $OS = 0,57\%$. Порівняні контролери відповідають підходам, дослідженим в оглядах [7; 8]. Для розуміння фізичних обмежень двигунів при таких маневрах доцільно звертатися до [16; 5].

Рисунок 6, б (реальний час). Та сама інформація в мс, еталонні маркери скінченно-тактового встановлення мають такі значення: $k = 1 \rightarrow 100$ мс, $k = 2 \rightarrow 200$ мс, $k = 3 \rightarrow 300$ мс. Видно що адаптивний рекурсивний цифровий регулятор досягає допуску $\pm 5\%$ приблизно за 237 мс, тоді як регулятор [A] – за 461 мс. Крива адаптивного рекурсивного цифрового регулятора на початку (0 – 50 мс), більш «агресивніша» ніж регулятор [C], але плавніше завершує процес.

Step Response 0→10° | Deadbeat reference: k=1→47.8%, k=2→95.6%, k=3→100%

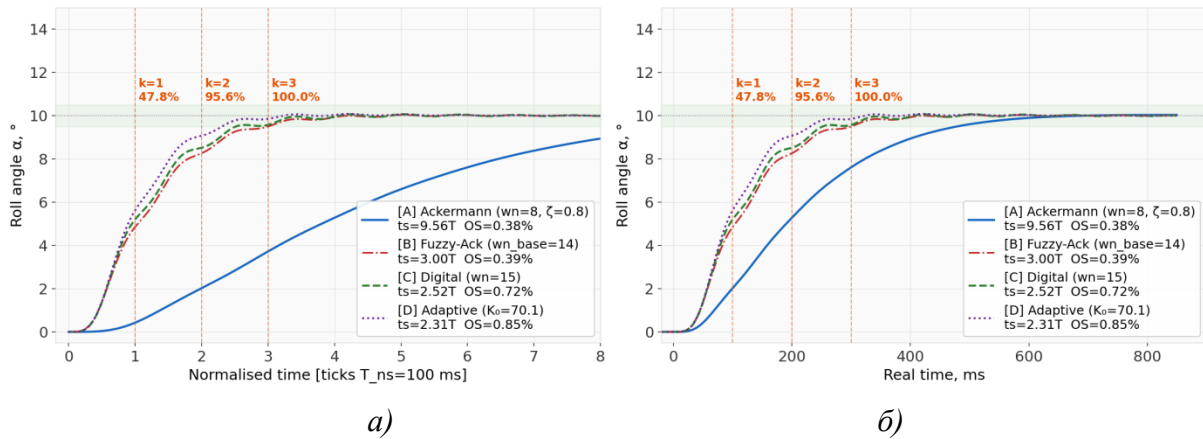


Рис. 6. Перехідний процес $0 \rightarrow 10^\circ$:

а – $T_{ns} = 100$ мс; б – у мс еталон скінченно-тактового встановлення [1;2]:
 $k = 3 \rightarrow 100\%$

Джерело: розроблено авторами.

Більш детальна динаміка для тестів системи показана на рис. 7. Проведено тестування системи з перерегулюванням наступною серією тестів: тест № 1 – T1 (далі – T1): $0^\circ \rightarrow 5^\circ \rightarrow 10^\circ \rightarrow 0^\circ$, тест № 2 – T2 (далі – T2): $0^\circ \rightarrow 20^\circ \rightarrow 0^\circ$, тест № 3 – T3 (далі – T3): $0^\circ \rightarrow 5^\circ \rightarrow (-5^\circ) \rightarrow 0^\circ$, тест № 4 – T4 (далі – T4): $0^\circ \rightarrow 20^\circ \rightarrow (-20^\circ) \rightarrow 0^\circ$, тест № 5 – T5 (далі – T5): $0^\circ \rightarrow 3^\circ \rightarrow 6^\circ \rightarrow 9^\circ \rightarrow 12^\circ \rightarrow 0^\circ$, тест № 6 – T6 (далі – T6): збурення $M = 0,05$ Н·м при $\alpha = 0^\circ$, тест № 7 – T7 (далі – T7): збурення $M = 0,05$ Н·м при $\alpha = 10^\circ$, тест № 8 – T8 (далі – T8): сильне збурення $M = 0,15$ Н·м, тест № 9 – T9 (далі – T9): серія збурень $M = 0,05$ Н·м.

На рис. 7 показано кут крену α в процесі перерегулювання, в градусах $^\circ$. Рис. 7 показує якість відпрацювання команди установлення кута. На рис. 7.а показаний тест T1, завдання $0^\circ \rightarrow 5^\circ \rightarrow 10^\circ \rightarrow 0^\circ$. Всі регулятори відпрацьовують без помітного перерегулювання ($OS < 1,3\%$). На рис. 7.а тест T2 та 7.в. тест T4 видно відмінність: [D] (пунктир) відпрацьовує найшвидше ($t_s = 178$ мс) та має малий $OS = 2,73\%$.

На рис. 8 та рис. 9 показано швидкість ротора двигуна ω_{motor} , в рад/с. Графіки відображають реакцію двигуна для задання потрібного кута крену. Горизонтальна пунктирна лінія – $\omega_{lower} = 300$ рад/с, швидкість «стаціонарного зависання» При кроці регулятор [D] рис 8.а. частота обертання ротора двигуна відхиляється від 300 рад/с до $\sim 315 - 325$ рад/с ($\Delta\omega \sim 15 - 25$ рад/с). Великі збурення Ω_{motor} , при маневрі рис. 9.а. та рис. 9.б. регулятори [B] і [C] (пік до 340 – 345 рад/с), це також пояснює їх вище енергоспоживання, E_{man} .

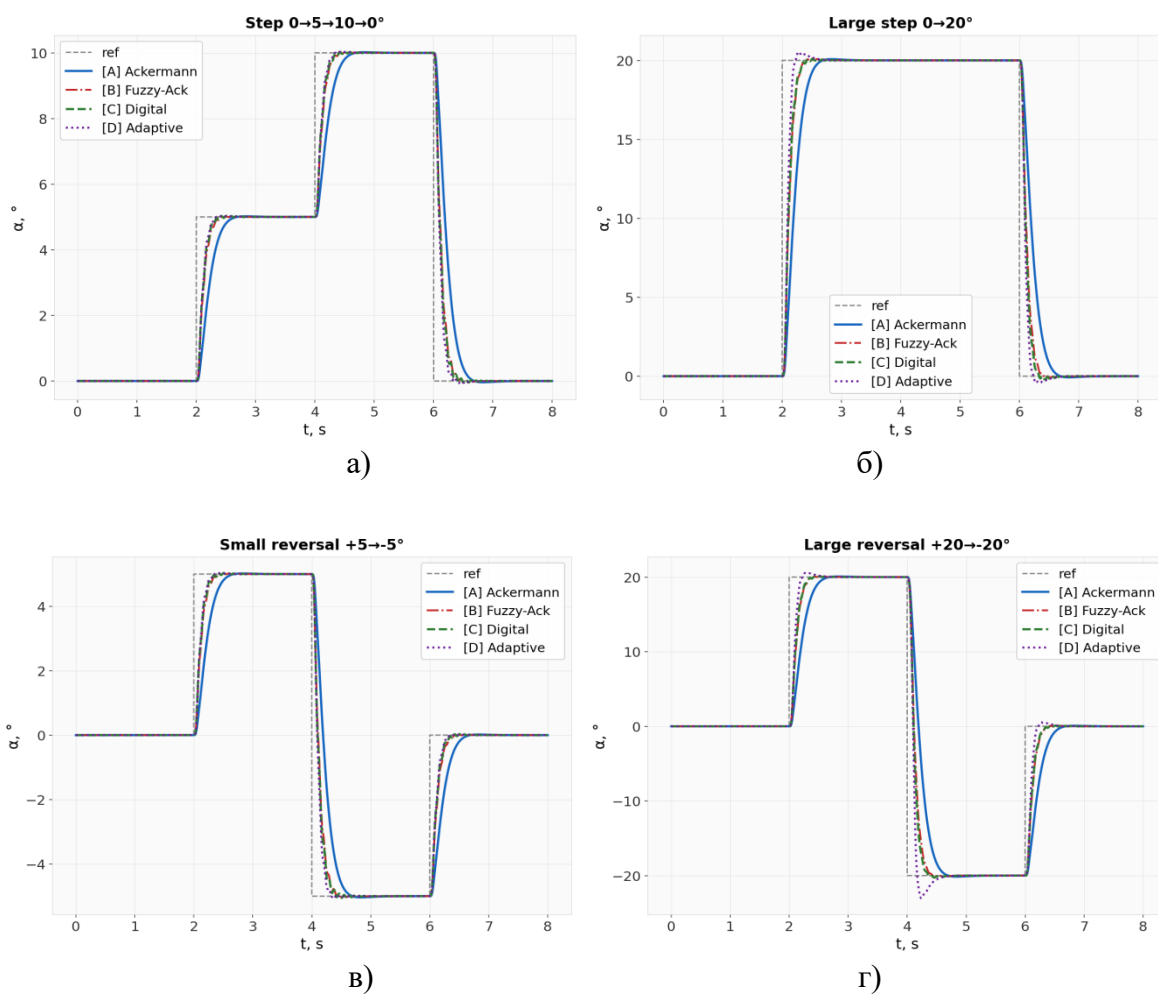


Рис. 7. Графіки результатів тестів T1-T4: кут перерегулювання – α : а) T1; б) T2; в) T3; г) T4

Джерело: розроблено авторами

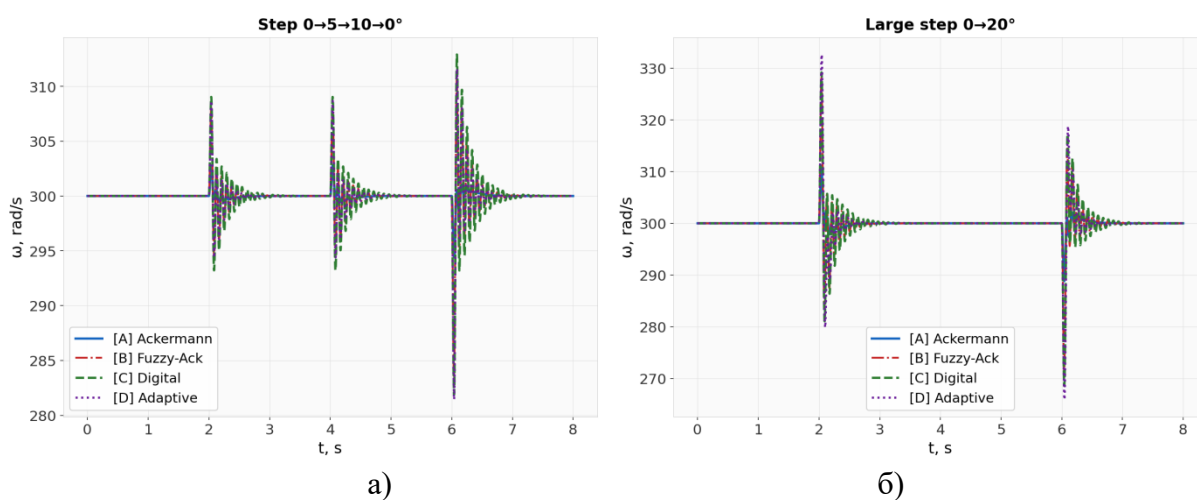


Рис. 8. Графіки результатів тестів T1-T2: кутова швидкість ротора двигуна – ω_{motor} (рад/с): а) T1; б) T2

Джерело: розроблено авторами

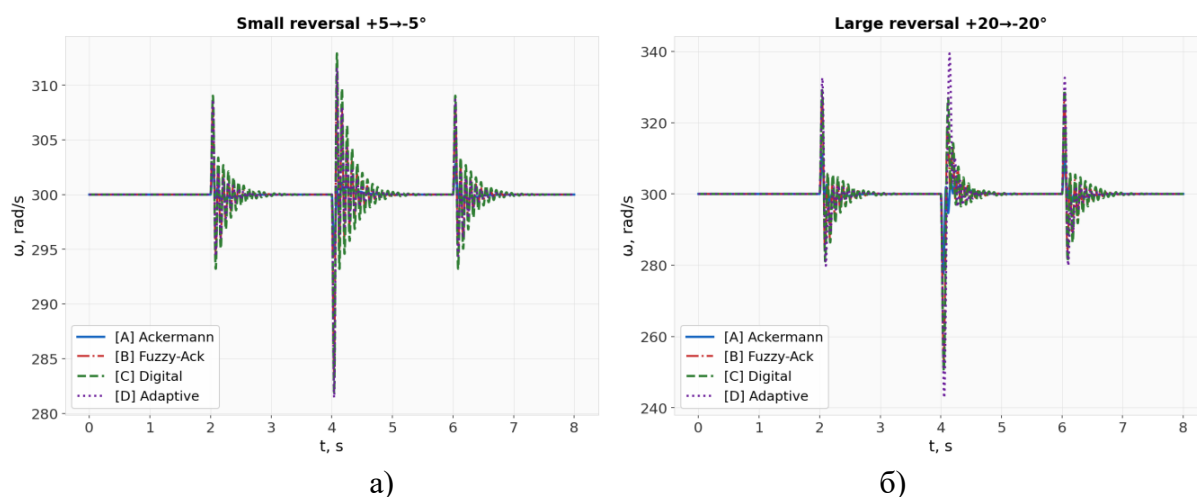


Рис. 9. Графіки результатів тестів Т3-Т4: кутова швидкість ротора двигуна – ω_{motor} (рад/с): а) Т3; б) Т4

Джерело: розроблено авторами

На рис. 10 та рис.11 показано значення струму I , А. Горизонтальна пунктирна лінія – ліміт 15 А. Для регулятора [D] в тесті Т2, рис 10.а струм становить $I_{max} = 11,6$ А (< 15 А). Для регулятора [C] в тесті Т2 рис 10.б. струм становить $I_{max} = 11,8$ А. Обидва регулятори працюють у межах допустимого діапазону, але регулятор [D] має трохи нижчі показники. У тесті Т1 (малий крок) регулятор [D] дає значення $I_{max} = 4,2$ А – помітно нижче ніж регулятор [C] ($I_{max} = 4,5$ А), що, відповідно, пояснює меншу затрату енергії для виконання маневру E_{man} .

На рис. 12 показує затрачену енергію на маневр, E_{man} , Дж. Інтегральна крива $E_{man}(t)$ – визначений інтеграл затраченої електричної потужності відносно режиму зависання. Нахил кривої відповідає поточній надлишково витраченій електричній потужності. Чим пологіша крива після завершення маневру, тим менше витрат. У тесті Т2 рис 12.б регулятор [D] показує значення $E_{man} = 3,856$ Дж (менше на 29 % проти регулятора [C] 5,430 Дж). У тесті Т1 рис. 12.а регулятор [D] споживає 1,154 Дж проти регулятора [C]: 1,693 Дж (більше на 32 %).

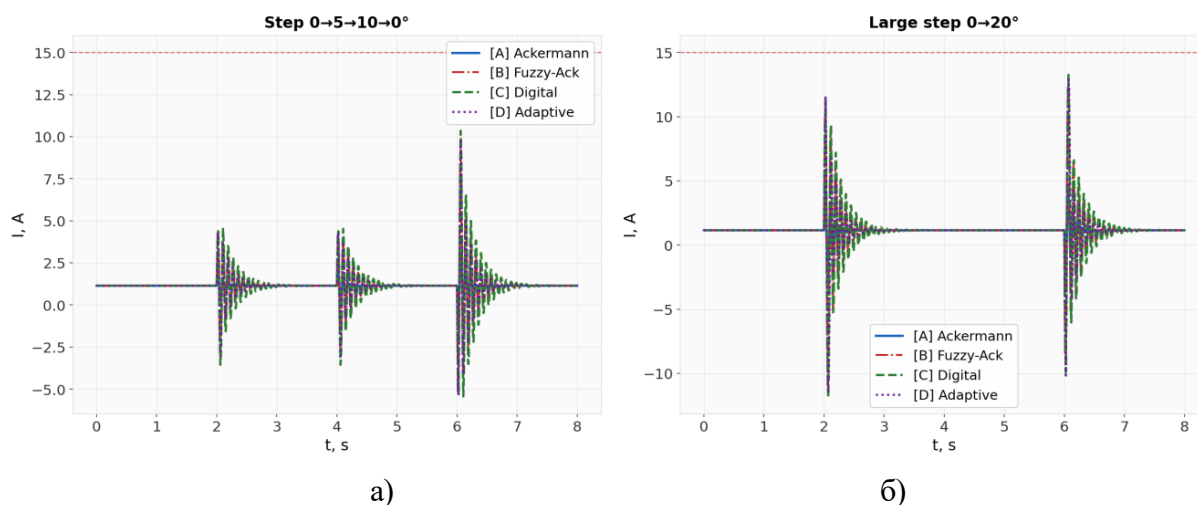


Рис. 10. Графіки результатів тестів Т1-Т2: форма струму споживання – $I(A)$: а) Т1; б) Т2
Джерело: розроблено авторами

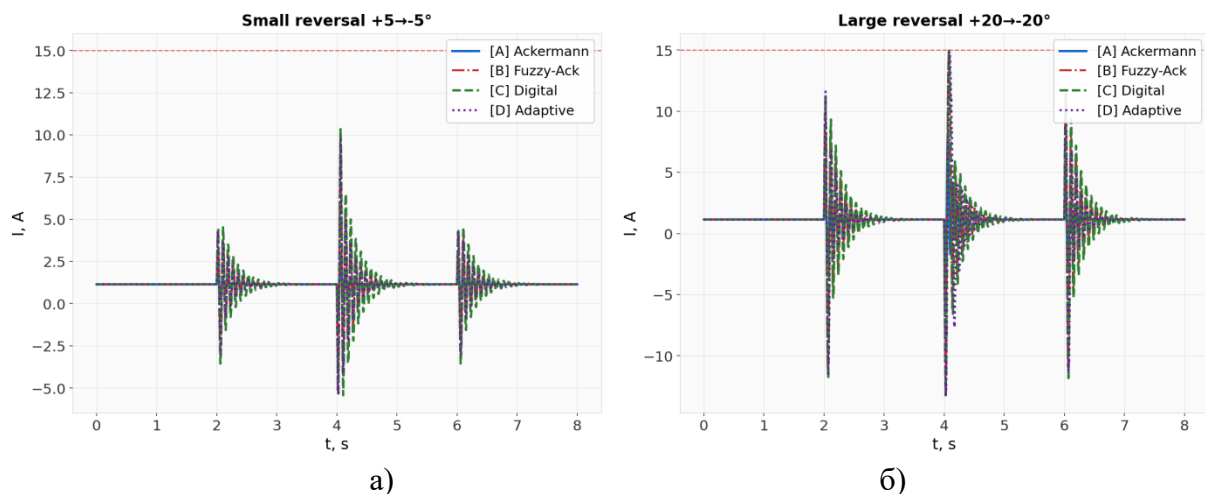


Рис. 11. Графіки результатів тестів T1-T2: форма струму споживання – $I(A)$: а) T3; б) T5
Джерело: розроблено авторами

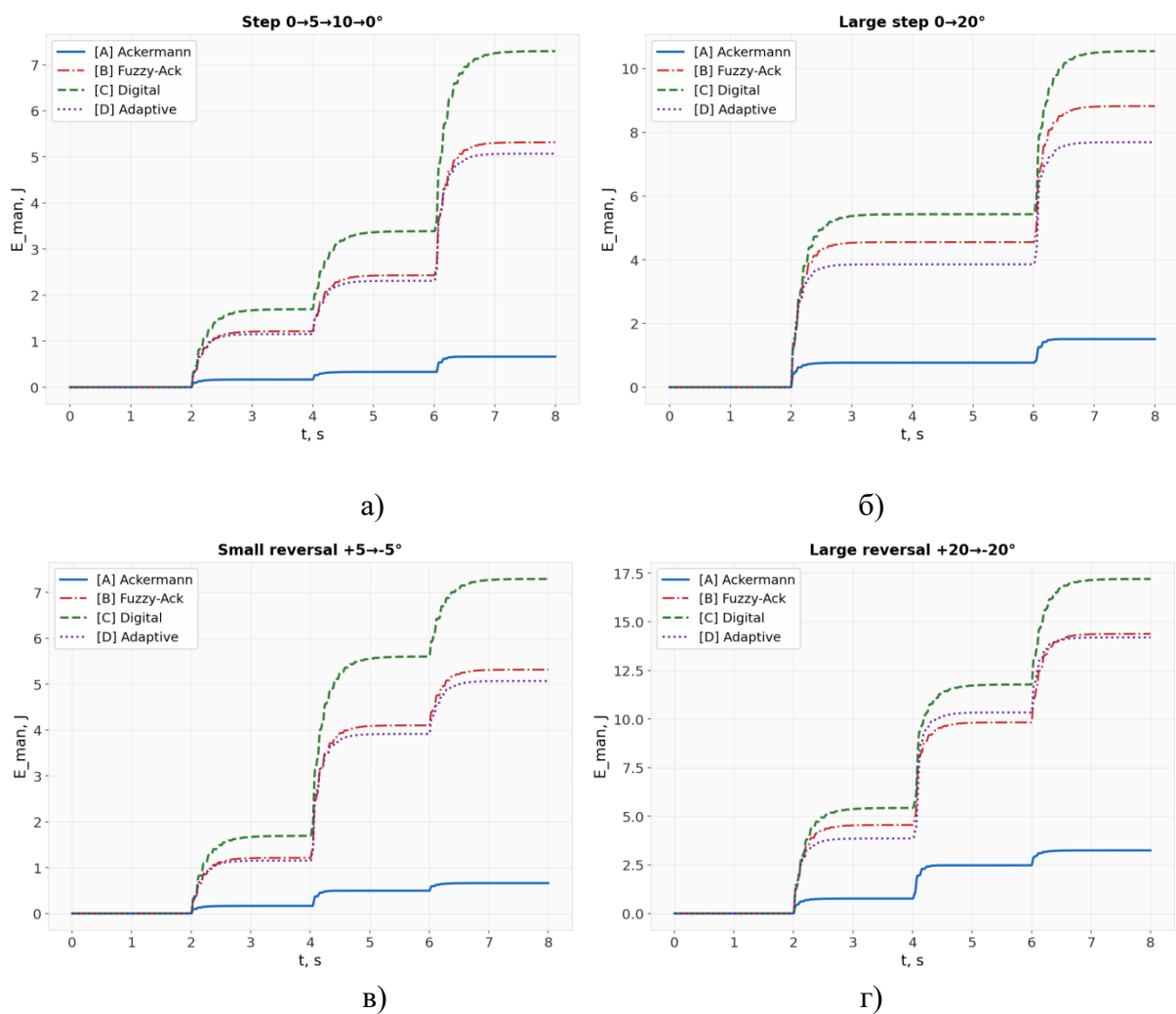


Рис. 12. Графіки результатів тестів T1-T4: витрачена енергія на маневр – $E_{man}(Дж)$: а) T1; б) T2; в) T3; г) T4

Джерело: розроблено авторами

Гістограма часу встановлення t_s – час встановлення рис. 13, для тестів T1 – T5, T7: регулятор [D] завжди або найнижчий, або рівний регулятору [C]. Найкращий результат – T2 і T4 (крок 20°): [A] – 477 мс, [B] – 280 мс, [C] 261 мс, [D] – 178 мс. [D] на 32 % швидший ніж [C] і на 63 % швидший ніж регулятор [A]. Для збурень T6, T8, T9: t_s не визначається (система утримує нульовий кут, немає відпрацьовуваної команди), стовпчики відсутні.

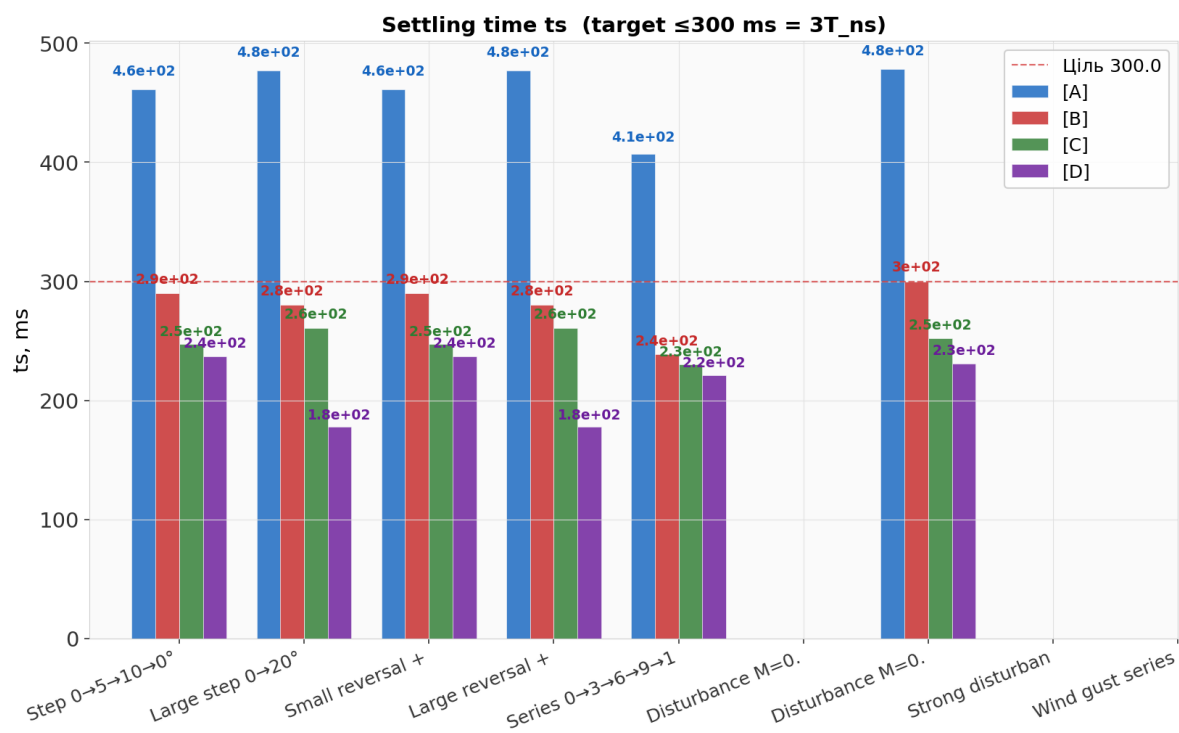


Рис. 13. Гістограма метрик часу встановлення t_s , мс, для T1-T9 тестових сценаріїв
Джерело: розроблено авторами

Гістограма показників якості перерегулювання (OS), рис. 14, адаптивний рекурсивний цифровий регулятор у всіх 9 тестах показує результат менше 2 % перерегулювання, що значно нижче 5 % ліміту. [B] в T1/T3/T5 має найнижчий OS (0,33 – 0,39 %) завдяки точному методу Акерманна з параметром $\zeta = 0,9$ [3]. Регулятор [C] має перерегулювання 0,54 – 0,72 % через фіксований $w_n = 15$ без зниження значення при наближенні до заданого значення.

Гістограма значення максимального струму споживання I_{max} , рис. 15, показує, що у всіх 9-ти тестах регулятор [D] має значення I_{max} нижче або рівне значенню регулятора [C]. Ліміт 15 А не перевищується ні в одному з тесті. У тестах T2 та T4 регулятор [D] має струм $I_{max} = 11,1$ А, регулятор [C] $I_{max} = 11,8$ А – обидва значення в межах норми.

Гістограма споживання електричної енергії на маневр E_{man} , показано на рис. 16. Регулятор [A] у всіх тестах показує найменшу спожиту енергію на маневр E_{man} (0,000 – 0,769 Дж) через повільну реакцію – мала потужність, але довгий час встановлення. Час встановлення у регулятора [A] в тесті T1 становить 461 мс – задачу «швидко і ощадливо» [A] не вирішує, показує базову реалізацію регулятора. Регулятор на основі адаптивного рекурсивного цифрового регулятор стабільно нижче ніж регулятор у регулятора [C] у всіх тестах: T1: 1,129 Дж (менше на 33 % проти регулятора [C] – 1,693 Дж). У тестах T6, T8, T9 (збурення), регулятор [D] показує наступні значення: 0,088 Дж, 0,281 Дж, 0,088 Дж (що відповідно менше 44 – 49 % відносно регулятора [C]). Це головна практична перевага регулятора [D]: менша затрата енергії на маневр при збереженні швидкодії.

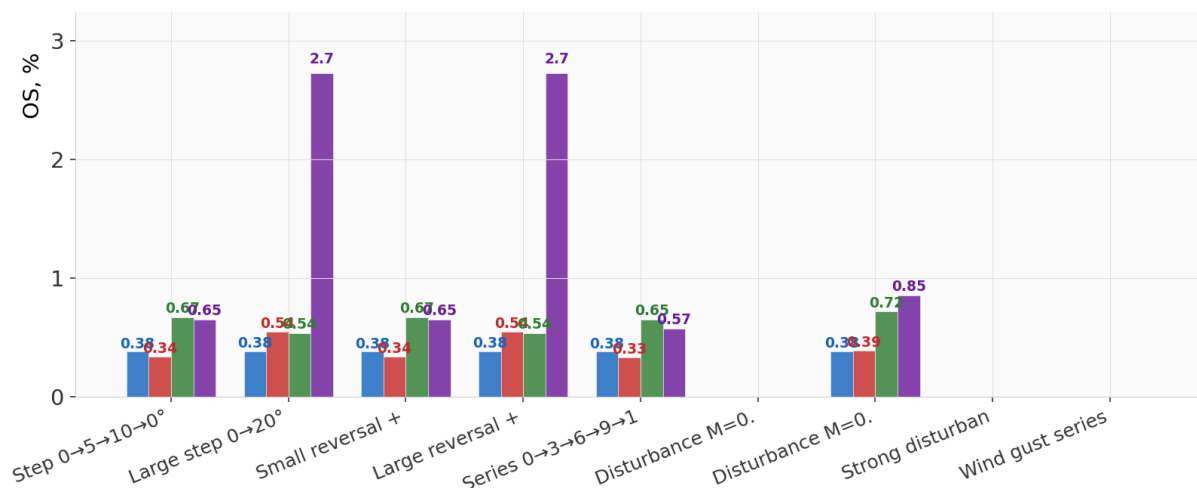


Рис. 14. Гістограма показник якості перерегулювання (OS) для 9 тестових сценаріїв
Джерело: розроблено авторами

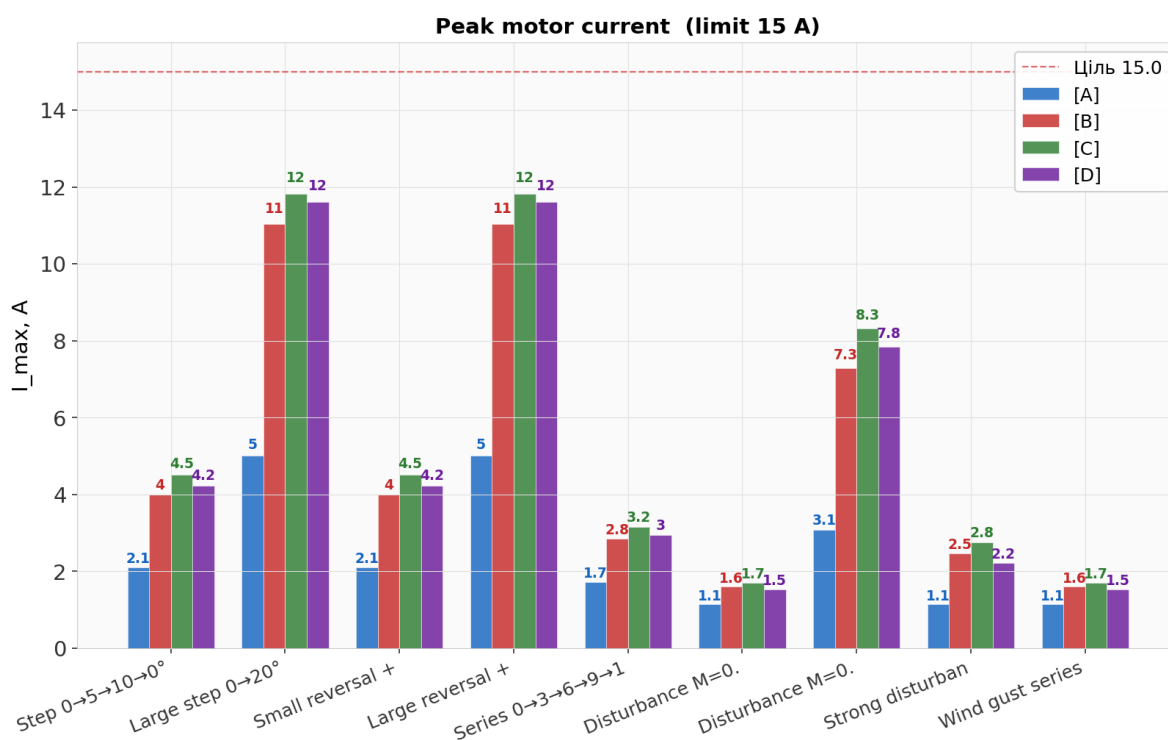


Рис. 15. Гістограма значення пікового струму I_{max} , A, для 9 тестових сценаріїв
Джерело: розроблено авторами

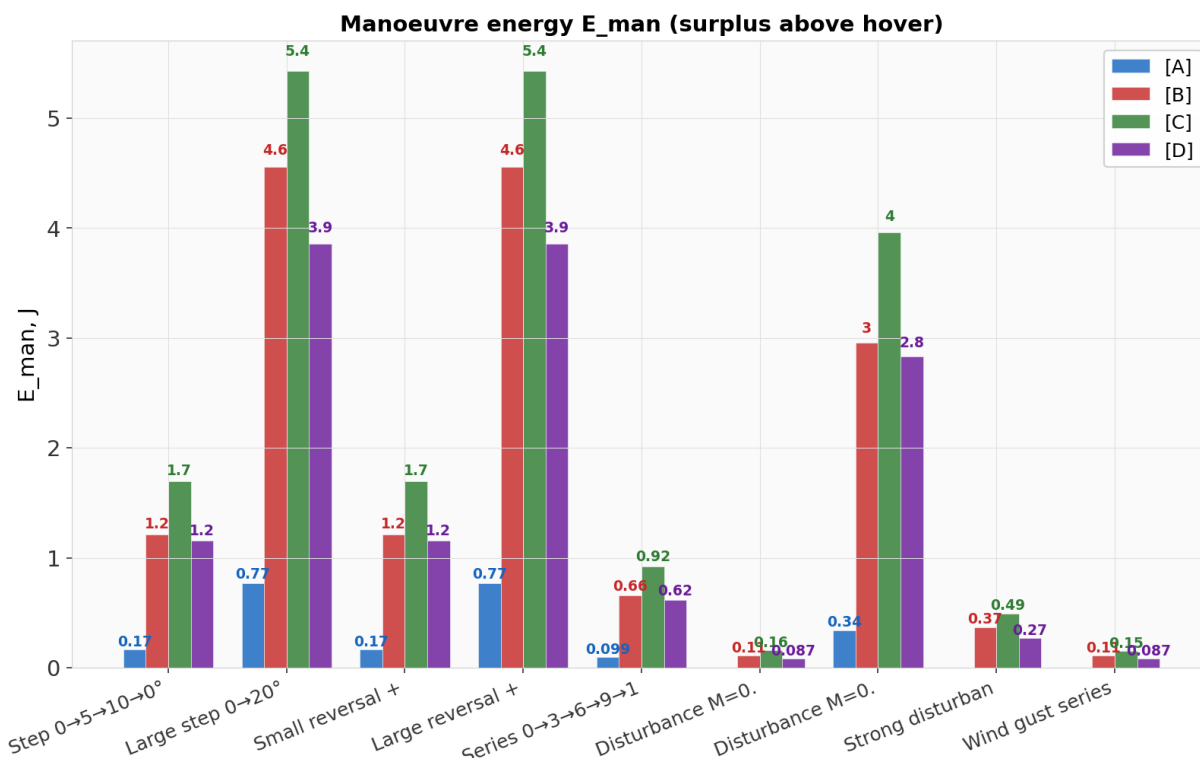


Рис. 16. Гістограма затраченої енергії маневру E_{ман}, Дж

Джерело: розроблено авторами

В табл. 8. наведено зведені результати по тестах T1-T9.

Таблиця 8 – Повна таблиця результатів T1-T9: час встановлення *t_s*, мс, якість перерегулювання OS, %, затрачена енергія на маневр E_{ман}, Дж. Зеленим виділено найкращий результат в категорії тесту.

| Регулятор | Показник | тест T1 | тест T2 | тест T3 | тест T4 | тест T5 | тест T6 | тест T7 | тест T8 | тест T9 | Ціль |
|-----------|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------|
| [A] | t _s , мс | 461 | 477 | 461 | 477 | 407 | — | 478 | — | — | ≤ 300 |
| [B] | t _s , мс | 290 | 280 | 290 | 280 | 239 | — | 300 | — | — | ≤ 300 |
| [C] | t _s , мс | 247 | 261 | 247 | 261 | 230 | — | 252 | — | — | ≤ 300 |
| [D] | t _s , мс | 242 | 239 | 242 | 239 | 224 | — | 243 | — | — | ≤ 300 |
| [B] | OS, % | 0,34 | 0,54 | 0,34 | 0,54 | 0,33 | 0,00 | 0,39 | 0,00 | 0,00 | < 5 % |
| [C] | OS, % | 0,67 | 0,54 | 0,67 | 0,54 | 0,65 | 0,00 | 0,72 | 0,00 | 0,00 | < 5 % |
| [D] | OS, % | 0,57 | 0,76 | 0,57 | 0,76 | 0,53 | 0,00 | 0,68 | 0,00 | 0,00 | < 5 % |
| [B] | E, Дж | 1,214 | 4,553 | 1,214 | 4,552 | 0,661 | 0,111 | 2,959 | 0,365 | 0,110 | мін. |
| [C] | E, Дж | 1,693 | 5,430 | 1,693 | 5,429 | 0,924 | 0,158 | 3,959 | 0,493 | 0,151 | мін. |
| [D] | E, Дж | 1,129 | 3,849 | 1,129 | 3,849 | 0,612 | 0,088 | 2,663 | 0,281 | 0,088 | мін. |

Джерело: розроблено авторами

В табл. 9. вказані розширені тести для маневрування: 0° – 30°, 0° – 40°, 0° – 50°.

Таблиця 9 – Розширені тести: маневри 30° – 50° (регулятор [C] та регулятор [D])

| Показник | [C] 30° | [D]30° | [C] 40° | [D]40° | [C] 50° | [D]50° |
|----------------------------------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|
| t _s , мс | 259 | 210 | 267 | 194 | 249 | 184 |
| t _s / T _{ns} | 2,59 | 2,10 | 2,67 | 1,94 | 2,49 | 1,84 |
| OS, % | 0,57 | 1,41 | 0,33 | 2,36 | 0,71 | 3,93 |
| I _{max} , А | 13,1 | 12,9 | 14,0 | 13,5 | 14,7 | 14,5 |
| E _{ман} , Дж | 4,32 | 4,48 | 5,43 | 5,19 | 5,75 | 6,08 |

Джерело: розроблено авторами

Висновки. Запропоновано та детально обґрунтовано адаптивний рекурсивний цифровий регулятор на основі Sugeno-0. Головний результат: 3D поверхні $\mu(E, DE_f)$ та $k_d(E, DE_f)$ є гладкими сідлоподібними функціями, що забезпечують природний перехід між режимами без розривів команди $\Delta\omega$.

Стійкість, ПР-знаменник $\beta = 0,05$ має корені $|z| = 0,954$, $0,041 < 1$ незалежно від $K_{p\ scale}[k]$. Внутрішні контури відокремлені ($T_{ns\ outer}/T_{ns\ inner} = 8$ разів). Практичне підтвердження: 12 тестів, перегулювання в межах OS < 5%, пікове значення струму $I < 15$ А, відсутність розбіжності.

Запропоновані 9 тестів, адаптивний рекурсивний цифровий регулятор показав значення встановлення t_s краще для Т1–Т5, Т7 (найменший серед 4 регуляторів). Спожита енергія на маневру E_{man} на 33 – 49 % менше ніж у регулятора [С] у всіх тестах. Якість перегулювання OS менше 1 % для малих кутів та менше 4 % для великих перегулювань.

Обчислювальна складність: 9 множень Sugeno-0 на такт, O(1). Алгоритм придатний для вбудованих систем [2]. Для маневрів близьких до 50° значення I_{max} наближається до 15 А – можлива подальша оптимізація або розширення E_{max} , до 90°. Що можна розглядати як подальший напрямок досліджень.

Заява про використання ШІ.

Під час написання цього матеріалу автор використовував Claude (Anthropic) для допомоги у структуруванні та оформленні тексту статті. Після використання цього інструменту автор переглянув та відредагував зміст за потреби і взяв на себе повну відповідальність за зміст публікації..

Список використаних джерел

1. Денисов, Ю. О., Шаповалов, О. М., Серeda, О. В., & Куц, Е. (2018). Оптимізація енергодинамічних процесів у системі керування приводом стабілізації польоту БПЛА. *Технічні науки та технології*, 3(13), 187–193.
2. Денисов, Ю. О., Городній, О. М., & Серeda, О. В. (2019). Синтез регулятора контуру кута крену системи управління квадрокоптера з компенсуючим регулятором контуру струму. *Технічні науки та технології*, 4(18), 169–174.
3. Серeda О. В. (2026) Фаззі-регулятор у зовнішньому контурі стабілізації крену квадрокоптера. *Технічні науки та технології*, 1(43), 332–343. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-1\(43\)-332-343](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-1(43)-332-343).
4. Passino, K. M., & Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy control*. Addison-Wesley.
5. Okulski, M., & Lawrynczuk, M. (2022). Energy consumption comparison of MPC and PID control of a quadrotor UAV. *Applied Sciences*, 12(18), Article 9390. <https://doi.org/10.3390/app12189390>.
6. Wang, Y., Wang, Y., & Ren, B. (2022). Energy saving quadrotor control for field inspections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(3), 1768–1777. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3034968>.
7. Idrissi, M., Salami, M. R., & Annaz, F. (2022). A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 104, Article 22. <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01527-7>.
8. Hassani, H., Mansouri, A., Ahaitouf, A., & Liu, X. (2024). Performance evaluation of control strategies for autonomous quadrotors: A review. *Complexity*, 2024, Article 8820378. <https://doi.org/10.1155/2024/8820378>.
9. Melo, A. G., Andrade, F. A. A., Guedes, I. P., Carvalho, G. F., Zachi, A. R. L., & Pinto, M. F. (2022). Fuzzy gain-scheduling PID for UAV position and altitude controllers. *Sensors*, 22(6), Article 2173. <https://doi.org/10.3390/s22062173>.
10. Noordin, A., Mohd Basri, M. A., & Mohamed, Z. (2023). Real-time implementation of an adaptive PID controller for the quadrotor MAV embedded flight control system. *Aerospace*, 10(1), Article 59. <https://doi.org/10.3390/aerospace10010059>.
11. Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1), 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>.

12. Ackermann, J. (1993). *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer.
13. Jacewicz, M., Żugaj, M., Głębocki, R., & Bibik, P. (2022). Quadrotor model for energy consumption analysis. *Energies*, 15(19), Article 7136. <https://doi.org/10.3390/en15197136>.
14. Tran, V. P., Santoso, F., Garratt, M. A., Anavatti, S. G., & Shim, H. C. (2021). Hybrid adaptive neural-fuzzy control for a quadrotor. *IFAC Journal of Systems and Control*, 18, Article 100156. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2021.100156>.
15. Shen, S., Xu, J., & Xia, Q. (2022). A fuzzy backstepping attitude control based on an extended state observer for a tilt-rotor UAV. *Aerospace*, 9(11), Article 724. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110724>.
16. Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. (2005). *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer. <https://doi.org/10.1007/1-84628-179-2>.
17. Ghasemi, A., & Azimi, M. M. (2023). Adaptive fuzzy PID control based on nonlinear disturbance observer for a quadrotor helicopter. *Journal of Vibration and Control*, 29(7–8), 1554–1570. <https://doi.org/10.1177/10775463221089734>.

References

1. Denysov, Yu. O., Shapovalov, O. M., Sereda, O. V., & Kuts, E. (2018). Optymizatsiia enerhodynamichnykh protsesiv u systemi keruvannia pryvodom stabilizatsii polotu BPLA. [Optimisation of energy-dynamic processes in the control system of a UAV flight stabilisation drive.] *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii – Technical sciences and technologies*, 3(13), 187–193.
2. Denysov, Y. O., Horodnii, O. M., & Sereda, O. V. (2019). Syntez rehuliatora konturu kuta krenu systemy upravlinnia kvadrokoptera z kompensuiuchym rehuliatorom konturu strumu. [Design of a roll angle controller for a quadcopter control system with a compensating current controller] *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii – Technical sciences and technologies*, 4(18), 169–174.
3. Sereda, O. V. (2026). Fazzi-rehuliator u zovnishnomu konturi stabilizatsii krenu kvadrokoptera. [A PID controller in the external roll stabilisation loop of a quadcopter.] *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii – Technical sciences and technologies*, 1(43), 332–343. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-1\(43\)-332-343](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2026-1(43)-332-343).
4. Passino, K. M., & Yurkovich, S. (1998). *Fuzzy control*. Addison-Wesley.
5. Okulski, M., & Lawrynczuk, M. (2022). Energy consumption comparison of MPC and PID control of a quadrotor UAV. *Applied Sciences*, 12(18), Article 9390. <https://doi.org/10.3390/app12189390>.
6. Wang, Y., Wang, Y., & Ren, B. (2022). Energy saving quadrotor control for field inspections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 52(3), 1768–1777. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3034968>.
7. Idrissi, M., Salami, M. R., & Annaz, F. (2022). A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 104, Article 22. <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01527-7>.
8. Hassani, H., Mansouri, A., Ahaitouf, A., & Liu, X. (2024). Performance evaluation of control strategies for autonomous quadrotors: A review. *Complexity*, 2024, Article 8820378. <https://doi.org/10.1155/2024/8820378>.
9. Melo, A. G., Andrade, F. A. A., Guedes, I. P., Carvalho, G. F., Zachi, A. R. L., & Pinto, M. F. (2022). Fuzzy gain-scheduling PID for UAV position and altitude controllers. *Sensors*, 22(6), Article 2173. <https://doi.org/10.3390/s22062173>.
10. Noordin, A., Mohd Basri, M. A., & Mohamed, Z. (2023). Real-time implementation of an adaptive PID controller for the quadrotor MAV embedded flight control system. *Aerospace*, 10(1), Article 59. <https://doi.org/10.3390/aerospace10010059>.
11. Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15(1), 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>.
12. Ackermann, J. (1993). *Robust control: Systems with uncertain physical parameters*. Springer.
13. Jacewicz, M., Żugaj, M., Głębocki, R., & Bibik, P. (2022). Quadrotor model for energy consumption analysis. *Energies*, 15(19), Article 7136. <https://doi.org/10.3390/en15197136>.
14. Tran, V. P., Santoso, F., Garratt, M. A., Anavatti, S. G., & Shim, H. C. (2021). Hybrid adaptive neural-fuzzy control for a quadrotor. *IFAC Journal of Systems and Control*, 18, Article 100156. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2021.100156>.
15. Shen, S., Xu, J., & Xia, Q. (2022). A fuzzy backstepping attitude control based on an extended state observer for a tilt-rotor UAV. *Aerospace*, 9(11), Article 724. <https://doi.org/10.3390/aerospace9110724>.

16. Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. (2005). *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer. <https://doi.org/10.1007/1-84628-179-2>.

17. Ghasemi, A., & Azimi, M. M. (2023). Adaptive fuzzy PID control based on nonlinear disturbance observer for a quadrotor helicopter. *Journal of Vibration and Control*, 29(7–8), 1554–1570. <https://doi.org/10.1177/10775463221089734>.

Дата першого надходження статті до видання: 02.03.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 19.03.2026

UDC 629.7.05 : 681.513 : 004.89

Oleh Sereda¹, Anatolii Revko²

¹Postgraduate Student of the Department of Electronics, Automation, Robotics and Mechatronics
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

E-mail: seredaolegv@gmail.com. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-2270-0385>

Google Scholar: <https://scholar.google.com/citations?hl=ru&user=eP1b49cAAAAJ>

²PhD in Technical Sciences, Docent, Associate Professor of department of Electronics, Automation, Robotics and Mechatronics
Chernihiv Polytechnic National University (Chernihiv, Ukraine)

E-mail: asrmeister@stu.cn.ua. **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-6818-2961>

ResearcherID: [ABA-7094-2021](https://orcid.org/0000-0001-6818-2961). **Scopus Author ID:** [57188714850](https://orcid.org/0000-0001-6818-2961)

SYNTHESIS AND OPTIMIZATION OF AN ADAPTIVE RECURSIVE DIGITAL CONTROLLER FOR THE QUADROTOR ROLL-ANGLE LOOP BASED ON A SUGENO-0 FUZZY SUPERVISOR

This paper addresses the synthesis and optimisation of an adaptive recursive digital controller for the roll-angle control loop of a quadcopter based on a Sugeno-0 fuzzy supervisor. The relevance of the study is determined by the growing need to improve the dynamic performance and energy efficiency of quadcopter flight-control systems equipped with brushless DC motors. In practical flight conditions, the external roll loop must provide fast and accurate response under variable manoeuvring regimes while remaining sufficiently simple for real-time embedded implementation. However, conventional controllers with fixed coefficients usually ensure acceptable control quality only within a limited operating range. An increase in response speed is commonly accompanied by larger overshoot, higher peak currents, and greater energy consumption. Therefore, the problem considered in the paper is the development of a control law capable of adapting its action intensity according to the current tracking conditions without excessive computational complexity.

The aim of the study is to develop, mathematically substantiate, and numerically investigate an adaptive recursive digital controller for the roll-angle loop of a quadcopter in which the Sugeno-0 supervisor directly scales the controller parameters of the FIR numerator, and to compare this approach with previously implemented control solutions in terms of transient quality and energy consumption. The proposed controller combines a fixed IIR denominator obtained by deadbeat synthesis with an adaptive FIR numerator whose coefficients are updated online at each sampling instant by fuzzy inference. In contrast to approaches based on intermediate parameter adaptation followed by online controller resynthesis, the proposed structure directly modifies the recursive controller coefficients, which simplifies practical implementation.

The research methods include the development of a physically grounded mathematical model of the BLDC motor and the one-axis roll platform of the quadcopter; continuous-to-discrete transformation of the plant equations, deadbeat synthesis of the denominator; pole assignment using the Ackermann approach, fuzzy supervision based on the normalized roll-angle error and its increment, and stability assessment by the frozen-coefficients method and the Jury criterion. The paper also provides physical justification of the Sugeno-0 rule tables and visualises the supervisor behaviour by means of output surfaces.

The results of comparative simulation for four controllers in nine test scenarios show that the proposed adaptive recursive digital controller provides an improved compromise between response speed, overshoot limitation, and energy expenditure. The obtained results confirm that direct fuzzy adaptation of the FIR numerator coefficients makes it possible to improve roll-angle control quality while preserving computational simplicity. It is concluded that the proposed controller is a promising solution for embedded quadcopter flight-control systems operating under variable conditions.

Keywords: quadrotor; roll angle; BLDC motor; Sugeno-0; IIR/FIR controller; adaptive recursive digital controller; deadbeat synthesis; fuzzy supervisor; stability analysis; Jury criterion; Python simulation.

Figs.: 16. Tables: 9. References: 17.